Cours agrégation (2021-2022) : Représentations de groupes

David Harari

Table des matières

Dans toute la suite, G désignera un groupe fini (noté multiplicativement) et V un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps des complexes $\mathbf{C}$. On note $\mathrm{GL}(V)$ le groupe des applications linéaires bijectives de V dans V, muni de la loi $\circ$ (qu'on notera souvent également multiplicativement).

1. Généralités

Définition 1.1 Une *représentation linéaire* (ou simplement représentation) ρ de G dans V est un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. On dit que V est l'*espace* de la représentation ρ et $n = \dim V$ son *degré*.

Si on choisit une base de V, on peut se donner ρ via la matrice M_s de $\rho(s)$ dans cette base pour tout $s \in G$. On notera souvent ρ_s pour $\rho(s)$. On parlera parfois de "la représentation V" si le morphisme ρ est sous-entendu.

Définition 1.2 Deux représentations $\rho : G \to V$ et $\rho' : G \to V'$ de G sont dite *isomorphes* (ou semblables) s'il existe un isomorphisme de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels $u : V \to V'$ tel que

$$u \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ u$$

pour tout $s \in G$.

On notera bien que l'isomorphisme u qui réalise l'égalité $u \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ u$ doit être indépendant de s.

Exemple 1.3 a) Une représentation de degré 1 d'un groupe fini G n'est pas autre chose qu'un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$. La *représentation unité* est le morphisme constant égal à 1. Voir les exercices pour une étude du groupe multiplicatif de ces morphismes, notamment quand G est abélien (cas auquel on peut se ramener car un morphisme de G dans le groupe abélien $\mathbf{C}^*$ est trivial sur le sous-groupe dérivé $D(G)$, donc induit un morphisme de l'abélianisé $G^{\mathrm{ab}} = G/D(G)$ dans $\mathbf{C}^*$).

b) La *représentation constante de degré n* envoie tout $s \in G$ sur l'identité d'un espace vectoriel de dimension n.

c) Soit G un groupe fini de cardinal g. Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension g, muni d'une base $(e_t)_{t \in G}$ indexée par les éléments de G. On définit alors une représentation $\rho : G \to V$ par la formule

$$\rho_s(e_t) = e_{st}.$$

On dit que ρ est la *représentation régulière* de G (il est immédiat qu'à isomorphisme près, elle ne dépend pas du choix de V et de la base (e_t)). Elle est de degré g. On peut aussi la définir en prenant pour V l'espace $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$ des fonctions de G dans $\mathbf{C}$ et en prenant pour ρ_s l'élément de $\mathrm{GL}(V)$ qui envoie toute fonction f sur la fonction $t \mapsto f(s^{-1}t)$; le lecteur vérifiera qu'on obtient bien des représentations isomorphes avec les deux définitions (prendre comme base de $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$ la famille $(e_s)_{s \in G}$, où e_s est la fonction caractéristique de $\{s\}$).

2. Sous-représentations

Définition 2.1 Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire. Une *sous-représentation* de ρ est la restriction $\rho^W : G \to \mathrm{GL}(W)$ de ρ à un sous-espace vectoriel W de V stable par tous les $\rho_s, s \in G$. Ainsi ρ^W est définie par :

$$\rho^W_s = (\rho_s)_{|W}, \quad \forall s \in G.$$

Noter que si W est stable par ρ_s, alors la restriction de ρ_s à W reste injective, donc est bien bijective de W dans W puisqu'on est en dimension finie.

Exemple 2.2 Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est la représentation régulière de G, et si W est le sous-espace de dimension 1 de V engendré par $x := \sum_{t\in G} e_t$, alors tous les ρ_s induisent l'identité sur W, ce qui fait que W est une sous-représentation de V, qui est d'ailleurs isomorphe à la représentation unité.

Définition 2.3 Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation. Soit $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ une décomposition de V en somme directe de sous-espaces stables par ρ. On dit alors que ρ est la *somme directe* des sous-représentations $\rho_i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ associées à ρ, et on note $\rho = \bigoplus_{i=1}^r \rho_i$.

Par exemple, la représentation constante de degré n est la somme directe de n copies de la représentation unité.

Theorème 2.4 *Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G. Soit W un sous-espace de V stable par ρ. Alors il existe un sous-espace supplémentaire W^0 de W dans V, qui est stable par ρ.*

Démonstration : On commence à choisir un supplémentaire quelconque W' de W dans V, et on appelle p le projecteur sur W parallèlement à W'. Soit g le cardinal de G, posons

$$p^0 := \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho_t p \rho_t^{-1}.$$

On observe que $\mathrm{Im}\, p^0 \subset W$ (car $\mathrm{Im}\, p \subset W$ et W est stable par ρ), et d'autre part si $x \in W$, on a $p(\rho_t^{-1}(x)) = \rho_t^{-1}(x)$ (puisque $\rho_t^{-1}(x) \in W$, toujours par stabilité de W pour ρ) d'où $p^0(x) = x$. Il en résulte que p^0 est un projecteur d'image W.

Définissons alors $W^0 := \mathrm{Ker}\, p^0$. On observe qu'on a l'égalité $\rho_s p^0 = p^0 \rho_s$ pour tout $s \in G$. En effet, on a :

$$\rho_s p^0 \rho_s^{-1} = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho_{st} p \rho_{t^{-1}s^{-1}} = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \rho_{st} p \rho_{(st)^{-1}} = p^0,$$

vu que l'application $t \mapsto st$ est une bijection de G dans lui-même. Il en résulte immédiatement que W^0 est stable par ρ, et c'est bien un supplémentaire de W dans V.

□

Remarque 2.5 On n'a pas utilisé le fait que $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, par contre le fait que la caractéristique du corps de base ne divise pas le cardinal de G est essentiel, pour pouvoir diviser par $|G|$ dans la définition de p^0.

3. Représentations irréductibles

La notion suivante est fondamentale :

Définition 3.1 Soit G un groupe fini. Une représentation linéaire $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est dite *irréductible* (ou simple) si $V \neq \{0\}$ et V n'admet aucun sous-espace stable par ρ autre que V et $\{0\}$.

Par exemple, toute représentation de degré 1 est de manière évidente irréductible (noter par contre que par convention, la représentation $V = \{0\}$ n'est pas irréductible).

Theorème 3.2 (Maschke) *Soit G un groupe fini. Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors, toute représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est somme directe d'un nombre fini de représentations irréductibles.*

Démonstration (esquisse): C'est une conséquence facile, par récurrence sur $\dim V$, du théorème 2.4.

$\square$

Noter qu'en général la décomposition en somme directe de représentations irréductibles n'est pas unique, mais on verra que le *nombre* de représentations iréductibles V_i isomorphes à une représentation irréductible donnée ne dépend pas de la décomposition choisie. Autrement dit, si on a deux décompositions $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i = \bigoplus_{i=1}^s V_i'$ avec V_i et V_i' irréductibles, alors il existe une bijection σ de $[1, r]$ sur $[1, s]$ telle que chaque représentation $V'_{\sigma(i)}$ soit isomorphe à la représentation V_i.

Remarque 3.3 Soit $\mathbf{C}[G]$ l'algèbre du groupe G : c'est l'espace des fonctions de G dans $\mathbf{C}$, dont on peut écrire tout élément f comme une somme formelle $f = \sum_{s\in G} a_s s$, avec $a_s := f(s) \in \mathbf{C}$. On munit $\mathbf{C}[G]$ de l'addition usuelle et du produit de convolution défini par la formule

$$(\sum_{s\in G} a_s s).(\sum_{s\in G} b_s s) := \sum_{s\in G}(\sum_{tt'=s} a_t b_{t'})s.$$

Alors, se donner une représentation de G revient à se donner un module (de type fini) sur l'anneau (non commutatif si G n'est pas abélien) $\mathbf{C}[G]$. Le théorème précédent assure qu'un tel module est *semi-simple* (il se décompose en somme directe de modules simples).

4. Caractère d'une représentation, lemme de Schur

Définition 4.1 Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G. Le *caractère* de ρ est la fonction $\chi : G \to \mathbf{C}$ définie par $\chi(s) = \mathrm{Tr}\,(\rho_s)$ pour tout $s \in G$, où Tr désigne la trace.

Proposition 4.2 *Soit χ le caractère d'une représentation ρ, supposée de degré n. Alors, on a :*

a) Si ρ est la représentation constante de degré n, on a $\chi(s) = n$ pour tout $s \in G$.

b) $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$ pour tout $s \in G$.

c) $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$ pour tous $s, t \in G$ (on dit qu'un caractère est une fonction centrale sur G, i.e. il vérifie $\chi(st) = \chi(ts)$ pour tous $s, t \in G$).

d) Si ρ est somme directe de $\rho_1, ..., \rho_r$, alors son caractère χ est somme des caractères $\chi_1, ..., \chi_r$ des ρ_i.

Démonstration : a) est immédiat. Pour b), on observe qu'en notant g le cardinal de G, on a $s^g = 1$ pour tout s de G par le théorème de Lagrange, et donc $\rho_s^g = \mathrm{Id}$, ce qui implique que les valeurs propres complexes $\lambda_1, ...\lambda_n$ de ρ_s sont des racines de l'unité, et celles de $\rho_{s^{-1}} = \rho_s^{-1}$ sont $\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}$. Ainsi

$$\chi(s^{-1}) = \sum_i \lambda_i^{-1} = \sum_i \bar{\lambda}_i = \overline{\chi(s)}.$$

Le c) résulte de la formule $\mathrm{Tr}\,(\rho_s\rho_t) = \mathrm{Tr}\,(\rho_t\rho_s)$, et le d) est immédiat en choisissant une base de l'espace de chaque ρ_i, puis en recollant ces bases en une base de l'espace de $\bigoplus_i \rho_i$.

□

Lemme 4.3 (Lemme de Schur) *Soit G un groupe fini. Soient $\rho^1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G. Soit $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire vérifiant $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$ pour tout $s \in G$. Alors :*

a) Si f n'est pas bijective (en particulier si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes), alors $f = 0$.

b) Supposons $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$. Alors f est une homothétie.

Une application linéaire $f : V_1 \to V_2$ vérifiant $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$ pour tout $s \in G$ s'appelle un *opérateur d'entrelacement* entre ρ^1 et ρ^2. Le lemme de Schur dit donc que pour ρ^1 et ρ^2 irréductibles, un tel opérateur est nul si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, et c'est une homothétie si $\rho^1 = \rho^2$.

Démonstration : a) Supposons $f \neq 0$ et posons $W_1 = \operatorname{Ker} f$. Alors on voit tout de suite que $\operatorname{Ker} f$ est stable par ρ^1, donc par irréductibilité on obtient $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ puisqu'on a exclu le cas $\operatorname{Ker} f = V_1$. On démontre de même par irréductibilité de ρ^2 que $\operatorname{Im} f = V_2$, donc f est bijective.

b) Comme on est sur $\mathbf{C}$, l'endomorphisme f possède au moins une valeur propre λ. Posons alors $f' = f - \lambda \mathrm{id}$, alors $\rho_s^2 \circ f' = f' \circ \rho_s^1$ pour tout $s \in G$; comme f' n'est pas bijective, le a) donne que $f' = 0$, i.e. f est une homothétie.

□

Remarque 4.4 Il est essentiel de travailler sur un corps algébriquement clos pour le b). Si on est par exemple sur $\mathbf{R}$, on peut prendre $G = \mathbf{Z}/n$ et définir une représentation ρ de G dans le plan $V = \mathbf{R}^2$ en envoyant la classe d'un entier k sur la rotation d'angle $2k\pi/n$. On obtient alors une représentation irréductible de G, mais comme G est abélien, toute application linéaire de V dans V est un opérateur d'entrelacement entre ρ et elle-même.

Corollaire 4.5 *Soit G un groupe fini de cardinal g. Soient $\rho^1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G. Pour toute application linéaire $h : V_1 \to V_2$, on définit une application linéaire $h^0 : V_1 \to V_2$ par la formule :*

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1.$$

Alors :

a) Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, on a $h^0 = 0$.

b) Si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, on a $h^0 = \frac{\operatorname{Tr} h}{n} \mathrm{id}$, où n est la dimension de V_1 et V_2.

Démonstration : On observe que $\rho_s^2 h^0 = h^0 \rho_s^1$ (le calcul est le même que dans la preuve du théorème 2.4). Le lemme 4.3 donne alors : dans le cas a), $h^0 = 0$ et dans le cas b), h^0 est une homothétie. Comme par ailleurs on a, dans le cas b), $\operatorname{Tr}(h^0) = \operatorname{Tr} h$ via l'invariance de la trace d'une matrice par conjugaison, on en déduit bien alors que $h^0 = \frac{\operatorname{Tr} h}{n} \mathrm{id}$ vu que la trace de l'identité est n.

□

Il est intéressant d'avoir maintenant une traduction matricielle du corollaire précédent. Si φ et ψ sont des fonctions $G \to \mathbf{C}$, notons

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t^{-1}) \psi(t) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t) \psi(t^{-1}). \qquad (1)$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire symétrique définie sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$ des fonctions de G dans $\mathbf{C}$.

Proposition 4.6 *Pour $t \in G$, soient $(r_{i_1 j_1}(t))$ et $(u_{i_2 j_2}(t))$ les matrices respectives de $\rho^1(t)$ et $\rho^2(t)$ dans des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ de V_1, V_2. Alors :*

a) Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, on a $\langle u_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ pour tous indices i_1, j_1, i_2, j_2.

b) Si $V_1 = V_2$ est de dimension n et $\rho^1 = \rho^2$ (auquel cas on prend $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ et on a $r_{ij} = u_{ij}$ pour tous indices i, j), alors $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ si $i_1 \neq i_2$ ou $j_1 \neq j_2$, et $\langle r_{ij}, r_{ji} \rangle = 1/n$ pour tous indices i, j.

Démonstration : Soit $h : V_1 \to V_2$ une application linéaire quelconque, de matrice $(x_{i_2 i_1})$ dans les bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$. On peut lui associer l'application linéaire h^0 comme dans le corollaire 4.5, de matrice $(x^0_{i_2 i_1})$. On a alors, d'après la formule définissant le produit de deux matrices :

$$x^0_{i_2 i_1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \sum_{j_1, j_2} u_{i_2 j_2}(t^{-1}) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t) = \sum_{j_1, j_2} \langle u_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle x_{j_2 j_1}.$$

Dans le cas a), ceci indique que la forme linéaire en les $x_{j_2 j_1}$ définie par le deuxième membre est nulle, ce qui implique que tous ses coefficients sont nuls. Ainsi : $\langle u_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ pour tous indices i_1, j_1, i_2, j_2.

Dans le cas b), on sait que h^0 est une homothétie de rapport

$$\lambda = \frac{\mathrm{Tr}\, h}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j_1 = j_2} x_{j_2 j_1}.$$

ainsi on a $x^0_{i_2 i_1} = 0$ si $i_2 \neq i_1$, ce qui donne $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ si $i_2 \neq i_1$. Si $i_2 = i_1 = i$, on obtient $\langle r_{i j_2}, r_{j_1 i} \rangle = 0$ si $j_1 \neq j_2$ et $\langle r_{ij}, r_{ji} \rangle = 1/n$ pour tous i, j.

$\square$

5. Les relations d'orthogonalité des caractères

C'est dans ce paragraphe que se trouvent les résultats fondamentaux sur les *caractères irréductibles* (=caractères des représentations irréductibles), et leurs conséquences sur la décomposition d'une représentation en somme d'irréductibles.

Soit G un groupe fini de cardinal g. On définit un produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$ des fonctions de G dans $\mathbf{C}$, par la formule[1] :

$$(\varphi|\psi) := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \overline{\varphi(t)} \psi(t).$$

Noter que cette formule est légèrement différente de celle de la forme bilinéaire symétrique $\langle \varphi, \psi \rangle$ définie par la formule (1). Néanmoins, si φ et ψ sont des caractères, les deux formules coïncident car dans ce cas $\overline{\varphi(t)} = \varphi(t^{-1})$ par la proposition 4.2, (b). Travailler maintenant avec le produit scalaire hermitien $(.|.)$ est meilleur, afin d'utiliser les propriétés usuelles des espaces hermitiens (alors que l'emploi provisoire de la forme bilinéaire symétrique $\langle ., . \rangle$ était plus commode pour formuler la proposition 4.6).

Theorème 5.1 *a) Soient ρ^1, ρ^2 deux représentations irréductibles non isomorphes de G. Soient χ_1, χ_2 leurs caractères respectifs. Alors $(\chi_1|\chi_2) = 0$.*

b) Soit χ le caractère d'une représentation irréductible ρ de G. Alors $(\chi|\chi) = 1$.

Observons que b) donne aussi la valeur de $(\chi|\chi')$ lorsque χ, χ' sont les caractères respectifs de deux représentations irréductibles isomorphes, puisqu'alors les fonctions χ et χ' coïncident.

Démonstration : a) Écrivons les formes matricielles respectives $r_{ij}(t)$ et $u_{ij}(t)$ de ρ^1, ρ^2. Alors, par définition de la trace, on a dans $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$: $\chi_1 = \sum_i r_{ii}$ et $\chi_2 = \sum_j u_{jj}$, d'où

$$(\chi_1|\chi_2) = \langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \sum_{i,j} \langle r_{ii}, u_{jj} \rangle,$$

qui est nul d'après la proposition 4.6, a).

b) Supposons ρ de degré n, donnée sous forme matricielle $\rho_t = (r_{ij}(t))$. Alors $\chi = \sum_i r_{ii}$ dans $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$, d'où

$$(\chi|\chi) = \langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i,j} \langle r_{ii}, r_{jj} \rangle.$$

D'après la proposition 4.6 b), on a $\langle r_{ii}, r_{jj} \rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\langle r_{ii}, r_{jj} \rangle = 1/n$ si $i = j$, ce qui donne finalement $(\chi|\chi) = 1$.

□

1. On utilise ici la convention qu'un produit scalaire est semi-linéaire en la première variable et linéaire en la seconde ; beaucoup d'auteurs emploient la convention inverse.

On appellera pour simplifier *caractère irréductible* de G le caractère d'une représentation irréductible de G. Le théorème précédent peut s'interpréter comme l'*orthogonalité* de deux caractères irréductibles distincts de G. En particulier, les caractères irréductibles forment une famille orthonormée de vecteurs de l'espace vectoriel hermitien $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$ des fonctions de G dans $\mathbf{C}$ (qui est de dimension finie $\#G$). On en déduit :

Corollaire 5.2 *Les caractères irréductibles sont en nombre fini.*

En effet, ils forment une famille orthonormée du $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$.

$\square$

Dans toute la suite, on écrira pour simplifier

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i$$

pour signifier qu'une représentation ρ est isomorphe à la somme directe des représentations $\rho_1, ..., \rho_r$.

Theorème 5.3 *Soient ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r les représentations irréductibles de G (bien définies à isomorphisme près) avec ρ_i non isomorphe à ρ_j si $i \neq j$. On note χ_i le caractère de ρ_i. Soit ρ une représentation de G, de caractère χ, telle que*

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} m_i \rho_i,$$

où on a noté $m_i \rho_i$ la somme directe de m_i représentations qui sont toutes isomorphes à ρ_i (et si $m_i = 0$, cela signifie que la représentation ρ_i n'apparaît pas dans la décomposition). Alors on a $m_i = (\chi | \chi_i)$.

La décomposition de ρ en somme directe de représentations irréductibles est donc unique à isomorphisme près des sous-représentations intervenant dans cette décomposition. On dit que m_i est le *nombre de fois que ρ contient ρ_i*.

Démonstration : On a $\chi = \sum_j m_j \chi_j$ par la proposition 4.2 d), et $(\chi_j | \chi_i)$ vaut 1 si $i = j$, 0 sinon d'après le théorème 5.1. On conclut par linéarité du produit scalaire $(.|.)$.

$\square$

Corollaire 5.4 *Soit G un groupe fini. Alors deux représentations de G de même caractère sont isomorphes.*

Cet énoncé et le corollaire 5.2 seront précisés au paragraphe suivant

Démonstration : En effet, leurs décompositions respectives en somme de représentations irréductibles contiennent alors le même nombre de fois toute représentation irréductible donnée.

□

Corollaire 5.5 *Soit φ le caractère d'une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Alors $(\varphi|\varphi)$ est un entier ≥ 0 (et > 0 si $\dim V > 0$), égal à 1 si et seulement si ρ est irréductible.*

Démonstration : Écrivons $\rho = \bigoplus m_i\rho_i$ avec les ρ_i irréductibles et deux à deux non isomorphes. Alors $(\varphi|\varphi) = \sum m_i^2$ est un entier, égal à 1 si et seulement s'il y a une seule ρ_i avec de plus $m_i = 1$, ce qui signifie exactement que ρ est irréductible.

□

6. Nombre de représentations irréductibles

On commence par un énoncé sur la représentation régulière.

Proposition 6.1 *Soit G un groupe fini de cardinal g.*

a) Le caractère r_G de la représentation régulière τ est donné par $r_G(1) = g$ et $r_G(s) = 0$ si $s \neq 1$.

b) Soit ρ une représentation irréductible. Alors ρ est contenue $\deg\rho$ fois dans la représentation régulière.

c) Si $n_1, ..., n_h$ sont les degrés des représentations irréductibles (à isomorphisme près) $\rho_1, ...\rho_h$ de G et $\chi_1, ..., \chi_h$ leurs caractères, on a $\sum_{i=1}^h n_i^2 = g$ et $\sum_{i=1}^h n_i\chi_i(s) = 0$ pour $s \neq 1$.

Démonstration : a) La représentation régulière $\tau : G \to \mathrm{GL}(V)$ est donnée par $\tau_s(e_t) = e_{st}$, où $(e_t)_{t\in G}$ est une base de V. On a $r_G(1) = g = \dim V$ car $\tau(1) = \mathrm{id}_V$. Pour $s \neq 1$, la matrice de τ_s dans la base (e_t) n'a que des zéros sur la diagonale, donc sa trace est nulle.

b) Soit χ le caractère de ρ. D'après le théorème 5.3, le nombre de fois que ρ est contenue dans τ est :

$$(r_G|\chi) = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\overline{r_G(s)}\chi(s) = \frac{1}{g}g\chi(1) = \chi(1)$$

d'après a). Or $\chi(1) = \deg\rho$.

c) D'après b), la représentation régulière τ s'écrit $\tau = \bigoplus_{i=1}^{h} n_i\rho_i$, d'où $r_G = \sum_{i=1}^{h} n_i\chi_i$. Il suffit alors d'appliquer a).

□

On va maintenant déterminer le nombre de caractères irréductibles de G via le lien avec les fonctions centrales.

Lemme 6.2 *Soit f une fonction centrale sur G. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G. On définit un endomorphisme ρ_f de V par :*

$$\rho_f = \sum_{t\in G} f(t)\rho(t).$$

Supposons ρ irréductible de degré n et de caractère χ. Alors $\rho_f = \lambda\mathrm{Id}$, avec

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t) = \frac{g}{n}(\bar{\chi}|f).$$

Démonstration : On calcule, pour $s \in G$:

$$\rho(s)^{-1}\rho_f\rho(s) = \sum_{t\in G} f(t)\rho(s^{-1}ts) = \sum_{t\in G} f(s^{-1}ts)\rho(s^{-1}ts)$$

car $f(s^{-1}ts) = f(t)$ par l'hypothèse que f est centrale. Comme $t \mapsto s^{-1}ts$ est une bijection de G dans G, on obtient $\rho(s)^{-1}\rho_f\rho(s) = \rho_f$ autrement dit ρ_f est un opérateur d'entrelacement entre ρ et elle-même.. D'après le lemme de Schur, on obtient que ρ_f est une homothétie. Son rapport est

$$\mathrm{Tr}\,(\rho_f)/n = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t),$$

comme on voulait.

□

Theorème 6.3 *Soit H le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions centrales sur G. Soient χ_1,...,χ_h les caractères irréductibles (deux à deux distincts) de G. Alors $(\chi_1, ..., \chi_h)$ est une base orthonormée de H.*

Démonstration : On sait déjà que la famille $(\chi_1, ..., \chi_h)$ est orthonormée par le théorème 5.1. Pour montrer qu'elle engendre H, il suffit de montrer que son orthogonal est nul, ou encore que l'orthogonal de la famille conjuguée $(\bar{\chi}_1, ..., \bar{\chi}_h)$ est nul. Soit donc $f \in H$ une fonction centrale orthogonale à tous les $\bar{\chi}_i$. Si ρ est une représentation irréductible de G, le lemme 6.2 donne

$\rho_f = 0$. Ceci reste vrai pour toute représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, car en la décomposant en somme directe de représentations irréductibles associées à des sous-espaces V_i de V, on obtient en effet que la restriction de ρ_f à chaque V_i est nulle. Ceci s'applique en particulier à la représentation régulière $\tau : G \to \mathrm{GL}(V)$. Pour celle-ci, on a une base $(e_t)_{t\in G}$ de V telle qu'on ait $\tau(t)e_1 = e_t$ pour tout t de G, d'où :

$$0 = \tau_f.e_1 = \sum_{t\in G} f(t)e_t,$$

ce qui donne $f(t) = 0$ pour tout $t \in G$ puisque (e_t) est une base. Ainsi $f = 0$.

□

Corollaire 6.4 *Le nombre de représentations irréductibles de G à isomorphisme près est le nombre c de classes de conjugaison de G.*

Démonstration : D'après le corollaire 5.4, le nombre de représentations irréductibles de G à isomorphisme près est l'entier h du théorème 6.3. Or, ce théorème dit qu'il s'agit de la dimension du $\mathbf{C}$-espace vectoriel H des fonctions centrales, lequel est de dimension c vu que se donner une fonction centrale revient à donner sa valeur sur chaque classe de conjugaison de G (de façon plus formelle, les fonctions caractéristiques des classe de conjugaison forment une base de H).

□