158. Matrices symétriques, matrices hermitiennes : questions

1. Soit A une matrice symétrique réelle définie positive. On rappelle qu'il existe une (unique) matrice R définie positive telle que $R^2 = A$. Soit B une matrice symétrique réelle.

a) La matrice AB est-elle toujours symétrique ?

b) Montrer que AB est semblable à RBR.

c) En déduire que AB est diagonalisable.

d) Retrouver le résultat de c) en utilisant le théorème de réduction simultanée.

e) Le résultat de c) vaut-il encore si A est seulement supposée symétrique positive (pas forcément définie) ?

2. Soit E un espace hermitien. Quels sont les endomorphismes de E qui sont à la fois auto-adjoints et des isométries de E ?

3. Soit q une forme hermitienne positive sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E. Montrer que le cône de q est égal à son noyau.

4. Soit $J \in M_n(\mathbf{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

a) Quelles sont les valeurs propres de J et leur multiplicité ?

b) Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$, on note $s(A)$ la somme de tous ses coefficients. Déterminer

$$\sup_{A \in O_n(\mathbf{R})} s(A),$$

où $O_n(\mathbf{R})$ est le groupe des matrices orthogonales de $M_n(\mathbf{R})$.

5. Soient A et B deux matrices symétriques réelles telles que $A^{2019} = B^{2019}$.

a) Montrer que A et B sont semblables. On fixe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

b) Montrer que P commute avec A. Conclusion ?

c) Y a-t-il un analogue pour des matrices complexes ?