122. Anneaux principaux : questions

1. Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses. On désigne toujours par A un anneau commutatif.

a) Si A est intègre, tout sous-anneau de A est intègre.

b) Si A est principal, tout sous-anneau de A est principal.

c) Si A est principal, tout quotient A/I de A par un idéal premier I est principal.

d) Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, l'image réciproque d'un idéal premier de B est un idéal premier de A.

2. Soit A un anneau factoriel. On suppose qu'il vérifie le théorème de Bezout, i.e. pour tous $a, b \in A$ premiers entre eux, il existe $u, v \in A$ avec $ua + vb = 1$.

a) Montrer que si $a, b \in A$ ont pour pgcd d, alors il existe $u, v \in A$ avec $ua + bv = d$.

b) Montrer que si une famille finie $a_1, ..., a_n$ d'éléments de A a pour pgcd 1, alors il existe des éléments $u_1, ..., u_n$ de A avec $\sum_{i=1}^{n} u_i a_i = 1$.

c) Montrer que si I est un idéal de A, alors il existe une famille finie d'éléments de I dont le pgcd est le pgcd de tous les éléments de I.

d) En déduire que A est principal.

3. Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. Un sous-ensemble S de A est appelé *partie multiplicative* de A si S est stable par produit, contient 1, et ne contient pas 0.

a) Montrer que si $s \in S$ est non nul, l'ensemble des $s^n, n \in \mathbf{N}^*$ est une partie multiplicative. Même question pour l'ensemble $A - \wp$, où $\wp$ est un idéal premier de A.

b) Montrer que si S est une partie multiplicative de A, l'ensemble A_S des éléments de K de la forme a/s avec $a \in A$ et $s \in S$ est un sous-anneau de A. On dit que c'est le *localisé* de A par rapport à S. Montrer que tout élément de S est inversible dans A_S.

c) Montrer que les idéaux de A_S sont exactement les sous-ensembles

$$IA_S := \{x/s, x \in I, s \in S\},$$

où I est un idéal de A. À quelle condition sur I l'idéal IA_S de A_S est-il premier ?

d) Montrer que si A est principal, alors A_S est principal. En déduire que l'anneau des nombres décimaux est principal.

e) On prend $S = A - \wp$, où $\wp$ est un idéal premier de A. Quels sont les idéaux premiers de A_S ? Quels anneaux A_S obtient-on ainsi quand $A = \mathbf{Z}$?

4. Dans l'anneau $A = \mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$, trouver deux éléments qui n'ont pas de pgcd.

5. Soit H l'anneau des fonctions holomorphes de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

a) Montrer que H est intègre. Quel est son corps des fractions ?

b) Montrer que H^* est constitué des fonctions qui ne s'annulent pas, et que l'ensemble des irréductibles de H est constitué des fonctions qui ont un seul zéro avec de plus ce zéro simple.

c) Montrer que H n'est ni factoriel ni noethérien, en exhibant un élément non inversible qui ne se décompose pas en produit d'irréductibles.

6. Soit A un anneau intègre. On dit que deux idéaux I et J de A sont *étrangers* si $I + J = A$ (de manière équivalente, cela signifie que 1 appartient à l'idéal $I + J$).

a) Montrer que si I_1 et I_2 sont tous deux étrangers avec J, alors l'idéal $I_1 I_2$ (constitué des sommes d'éléments de la forme $a_1 a_2$ avec $a_1 \in I_1$ et $a_2 \in I_2$) est encore étranger avec J.

b) On suppose que A est factoriel et que tout idéal premier non nul de A est maximal. Montrer que si $p \in A$ est irréductible et ne divise pas a, alors (p) est étranger avec (a).

c) On garde les hypothèses de b). Montrer que si $a, b \in A$ sont premiers entre eux, les idéaux (a) et (b) sont étrangers. En déduire que A est principal en utilisant l'exercice 2 de cette feuille.

7. Soit A un anneau euclidien, de stathme $v : A \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$. Pour tout x non nul dans A, on pose

$$w(x) := \min_{x|y} v(y).$$

a) Montrer que w est aussi un stathme euclidien pour A (si a, b sont dans A avec $b \neq 0$ ne divisant pas a et $w(b) = v(bs)$ avec $s \in A$, on effectuera la division euclidienne de as par bs pour le stathme v).

b) Montrer que pour tous x, y non nuls dans A, on a $w(xy) \geq w(x)$, et que si $u \in A^*$, on a $w(ux) = w(x)$.

c) Soit $m = \min_{x \in A \setminus \{0\}} w(x)$. Montrer que pour tout a non nul dans A, on a $w(a) = m$ ssi $a \in A^*$.