190. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement: indications de solutions

1. Il est possible d'obtenir le résultat directement à partir de la formule de Burnside (cf. feuille d'exercices sur les groupes numéro 3). Sinon, notons $\sigma_1, ..., \sigma_{n!}$ les élements de $\mathcal{S}_n$ et formons la matrice (A_{ij}) à $n!$ lignes et n colonnes telle que le coefficient a_{ij} soit 1 si σ_i fixe j et 0 sinon. Calculons $S := \sum_{i,j} a_{ij}$ en faisant la somme des lignes, on obtient $\sum_{k=0}^{n} k f_n(k)$ (en triant les permutations par leur nombre de points fixes). Par ailleurs, chaque colonne contient $(n-1)!$ fois 1, vu que le nombre de permutations laissant fixe j est $(n-1)!$, pour tout j de $\{1, ..., n\}$. Finalement

$$\sum_{k=0}^{n} k f_n(k) = n(n-1)! = n!.$$

2. a) On note que

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k},$$

d'où

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k} =$$

$$\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^{n-i-k}\binom{n-i}{n-i-k} = \binom{n}{i}(1-1)^{n-i},$$

ce qui donne que la somme vaut 0 sauf pour $i = n$, auquel cas elle vaut 1.

b) On calcule

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}u_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}v_i =$$

$$\sum_{i=0}^{n} v_i \sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i} = v_n,$$

d'après a).

c) Il y a n^p applications d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments, qu'on peut trier suivant le cardinal k de leur image. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k éléments d'une image F_k de cardinal k, et ensuite $S_{p,k}$ surjections de E dans F_k, donc finalement $\binom{n}{k} S_{p,k}$ applications de E dans F dont l'image est de cardinal exactement k. La formule en découle.

d) En appliquant b) et c), on obtient

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

e) Soit v_k le nombre de permutations de $\{1, ..., k\}$ sans point fixe. Il y a $\binom{n}{k} v_k$ permutations de $\{1, ..., n\}$ qui ont exactement $n-k$ points fixes ($\binom{n}{k}$ choix pour les $n-k$ points fixes, et ensuite v_k choix pour permuter les autres), d'où

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k,$$

et avec b) on obtient

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k / k!.$$

3. a) Soit q le cardinal de K, on sait que dans K^*, il y a $(q-1)/2$ carrés car le morphisme $x \mapsto x^2$ de K^* dans lui-même a pour noyau $\{\pm 1\}$ (de cardinal 2 car K n'est pas de caractéristique 2) et pour image l'ensemble des carrés de K^*. En comptant 0, il y a donc $(q+1)/2$ carrés.

Maintenant, une forme quadratique de rang au moins 3 sur K s'écrit dans une base adaptée $q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2$ avec $r \geq 3$ et les a_i dans K^*. Il suffit de traiter le cas $r = 3$ (quitte à prendre 0 pour les x_i avec $i > 3$). Prenons $x_3 = 1$, on cherche alors à résoudre

$$x_1^2 = \frac{1}{a_1}(-a_2 x_2^2 - a_3).$$

D'après le comptage des carrés de K, il y a $(q+1)/2$ éléments de la forme x_1^2, et également $(q+1)/2$ éléments de la forme $(-a_2 x_2^2 - a_3)$ (observer que la fonction $y \mapsto -a_2 y - a_3$ est une bijection de K dans K). Comme on a :

$$(q+1)/2 + (q+1)/2 > q,$$

au moins un élement de K est à la fois des deux formes, ce qui prouve le résultat.

b) i) Supposons le contraire, alors il existe une suite extraite de (q_n) qui est bornée, puis une suite extraite de (q_n) qui est constante puisque les (q_n) sont des entiers positifs. La suite extraite correspondante $(p_{\varphi(n)})$ converge alors aussi, donc est constante à partir d'un certain rang. Finalement (p_n/q_n) admet une suite extraite constante, donc la limite ne peut pas être irrationnelle puisque tous les termes de cette suite extraite sont rationnels.

ii) Notons $f(x)$ la partie fractionnaire $x - [x]$ d'un réel x. On divise $[0, 1[$ en n intervalles (fermés à gauche et ouverts à droite) de longueur égale, alors par le principe des tiroirs, il existe deux nombres, parmi les $f(kx)$ pour $0 \leq k \leq n$, qui tombent dans le même intervalle. Ainsi, il existe des entiers k, k'avec $0 \leq k < k' \leq n$ tels que $|f(k'x) - f(kx)| < 1/n$. Posons $q_n = (k' - k)$ et $p_n = [k'x] - [kx]$, alors $0 < q_n \leq n$ et

$$|q_n x - p_n| < 1/n \leq \frac{1}{q_n}.$$

iii) Comme $|q_n x - p_n| < 1/n$, la suite (p_n/q_n) tend vers x, et d'après i), la suite (q_n) tend vers $+\infty$, ce qui donne le résultat avec ii).

c) i) Notons $\mathbf{1}_X$ la fonction indicatrice d'une partie X de $\mathbf{R}^n$. On a

$$\sum_{\alpha} \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_{N_\alpha} > k \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_N.$$

Ceci implique qu'il existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\sum_{\alpha} \mathbf{1}_{N_\alpha}(x) > k \mathbf{1}_N(x),$$

ce qui implique $x \in N$ (sinon les deux membres de l'inégalité seraient nuls), puis que x appartient à au moins $k + 1$ des ensembles N_α.

ii) Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, le terme de gauche vaut aussi :

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} \mu((D + \alpha) \cap M) = \mu(M),$$

car les $(D+\alpha) \cap M$ pour $\alpha \in \mathbf{Z}^n$ constituent une partition de M. Par ailleurs, le terme de droite vaut au plus k, car $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} (D \cap (M - \alpha))$ est inclus dans D, qui est de mesure 1.

iii) D'après i) et ii), il existe $\alpha_1, ..., \alpha_{k+1}$ deux à deux distincts dans D et $x \in \mathbf{R}^n$ qui est dans tous les $D \cap (M - \alpha_i)$. Il suffit alors de considérer les $k + 1$ points $x + \alpha_1, ..., x + \alpha_{k+1}$.

4. Cf. exercice 2 de la leçon 101.