158. Matrices symétriques, matrices hermitiennes : solutions

1. a) Non : la transposée de AB est BA vu que A et B sont symétriques, donc dès que A et B ne commutent pas, AB n'est pas symétrique.

b) On a $AB = R^2B = R(RB) = R(RBR)R^{-1}$. Noter en effet que R est inversible vu que A l'est.

c) D'après b), AB est semblable à la matrice symétrique RBR, donc est diagonalisable.

d) Le théorème de réduction simultanée dit qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A =^t PP$ et $B =^t PDP$. On observe alors que $A^{-1}B = P^{-1}DP$ est diagonalisable. Pour conclure, il suffit d'appliquer ce qu'on vient de voir en changeant A en a^{-1}.

e) Non : prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et cherchons B sous la forme $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable pour $a = 0$ et $b \neq 0$.

2. En regardant la matrice A d'un tel endomorphisme dans une base orthonormée où il diagonalise, la condition s'écrit $A = A^*$ et $A^*A = I$, avec A diagonale, dont les valeurs propres sont à la fois réelles et de module 1, i.e. égales à -1 ou 1. Il s'agit donc des symétries orthogonales.

3. C'est immédiat en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, dont on vérifiera que la preuve marche encore pour q positive et pas forcément définie positive (par contre le fait que le cas d'égalité ne survienne que pour deux vecteurs liés est spécifique au cas défini positif). En dimension finie, on peut aussi diagonaliser la forme q pour se ramener au cas où q est donnée par

$$q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

avec les λ_i dans $\mathbf{R}_+$, après quoi il est facile de voir que si par exemple les r premiers λ_i sont > 0 et les autres nuls, le cône et le noyau de q consistent tous deux en l'espace engendré par les r premiers vecteurs de la base.

4. a) On voit tout de suite que J est de rang 1, donc on a la valeur propre 0 avec multiplicité au moins $n-1$; la dernière valeur propre est n car $\mathrm{Tr}\, J = n$.

b) On observe que $s(A) = \mathrm{Tr}\,(AJ)$. Comme J est symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée et d'après a), on a donc une matrice orthogonale O telle que $J = ODO^{-1}$ avec $D = \mathrm{Diag}(n, 0, ..., 0)$. Pour A orthogonale, on a

$$\mathrm{Tr}\,(AJ) = \mathrm{Tr}\,(AODO^{-1}) = \mathrm{Tr}\,((O^{-1}AO)D).$$

Comme $A \mapsto O^{-1}AO$ est une bijection de $O_n(\mathbf{R})$ sur lui-même, on est ramené à chercher le sup de $\mathrm{Tr}\,(AD)$ pour A orthogonale. Cette quantité vaut na_{11}, ce qui donne que le sup vaut n (il est atteint par exemple pour l'identité), vu qu'une matrice orthogonale a tous ses coefficients de valeur absolue ≤ 1.

5. a) On sait que A et B sont diagonalisables, et elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités) car $\varphi : x \mapsto x^{2019}$ est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

b) On observe que

$$A^{2019} = PB^{2019}P^{-1} = PA^{2019}P^{-1}.$$

Ainsi P commute avec A^{2019}, donc laisse stable ses sous-espaces propres. En diagonalisant A, on voit que les sous-espaces propres de A et A^{2019} sont les mêmes (toujours parce que φ est bijective), puis que P commute avec A (c'est le cas sur chaque sous-espace propre, et la somme de ces espaces est $\mathbf{R}^n$ tout entier). Finalement $A = B$ vu que $B = P^{-1}AP$.

c) Oui, à condition de remplacer "symétriques" par hermitiennes. La preuve est la même, l'important étant de noter que les valeurs propres restent réelles.