Questions rapides : algèbre bilinéaire, topologie sur les espaces de matrices)

D. Harari

Agrégation

1. Soient A et B deux matrices symétriques réelles. La matrice AB est-elle diagonalisable ?

2. Même question si on suppose de plus que A est définie positive (resp. positive).

3. Une matrics symétrique complexe est-elle toujours diagonalisable ?

4. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire euclidien ou hermitien. Est-elle encore valable pour une forme quadratique (resp. hermitienne) seulement positive ?

5. Montrer que le cône d'une forme quadratique ou hermitienne positive est égal à son noyau.

6. Dans un espace euclidien, la réciproque du théorème de Pythagore est-elle vraie ? Et dans un espace hermitien ?

7. Soient A et B deux matrices hermitiennes complexes telles que $A^7 = B^7$. Montrer que A et B sont semblables, puis que $A = B$.

8. Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $0 \leq q_1(x) \leq q_2(x)$. On fixe une base de E et on désigne par A et B les matrices respectives de q_1 et q_2 dans cette base. Montrer que $\det A \leq \det B$.

9. Donner un exemple de deux formes quadratique non dégénérées φ et ψ sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, telles qu'il n'existe pas de base orthogonale à la fois pour φ et ψ.

10. Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbf{C})$ est trigonalisable dans une base orthonormée (pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$).

11. Si q est une forme quadratique non dégénérée sur un K-ev E (où K est un corps de caractéristique différente de 2), alors la restriction de q à tout sous-espace F de E est-elle non dégénérée ?

12. Avec les notations de 12., soit F un sous-espace de E. Si q une forme quadratique sur E et si la restriction de q à F est non dégénérée, q est-elle non dégénérée ?

13. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E. On suppose qu'il existe $a \neq 0$ dans E tel que $q(a) = 0$ (autrement dit, q n'est pas anisotrope). Montrer que l'application $q : E \to K$, $x \mapsto q(x)$ est surjective.

14. On appelle *u-invariant* du corps K l'élément de $\mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$ défini comme le sup des entiers $n \geq 1$ qui ont la propriété suivante : il existe une forme quadratique anisotrope de rang n sur le corps K. Déterminer le u-invariant des corps : $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{F}_q$.

15. L'ensemble des matrices complexes diagonalisables est-il un fermé de $M_n(\mathbf{C})$?

16. Est-ce un ouvert de $M_n(\mathbf{C})$?

17. Mêmes questions pour l'ensemble des matrices complexes diagonalisables dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes.

18. Montrer que le groupe unitaire $U_n(\mathbf{C})$ est compact

19. Soit F un fermé de $\mathbf{C}$. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{C})$ dont le spectre est inclus dans F est fermé.

20. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{R})$ qui sont trigonalisables dans $M_n(\mathbf{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbf{R})$.

21. Montrer que le groupe unitaire $U_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

22. L'ensemble des matrices hermitiennes positives est-il connexe ? Fermé dans $M_n(\mathbf{C})$?

23. Toute matrice A de $M_n(\mathbf{C})$ admet-elle une décomposition $A = UH$ avec U unitaire et H hermitienne positive ?

24. Quelle est l'adhérence dans $M_n(\mathbf{C})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables ? Même question avec $M_n(\mathbf{R})$.