151. Dimension d'un espace vectoriel : questions

1. Soit r un entier avec $0 \leq r \leq n$. L'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{R})$ de rang au moins r est-il un fermé de $M_n(\mathbf{R})$? Est-il un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$?

2. Soient K un corps infini et u un endomorphisme de K^3 stabilisant exactement trois plans. Montrer que u est diagonalisable à valeurs propres distinctes.

3. Soit L une extension d'un corps K. On rappelle qu'un élément $x \in L$ est *algébrique sur* K s'il existe un polynôme unitaire $P \in K[X]$ tel que $P(x) = 0$.

a) Montrer que x est algébrique sur K si et seulement si le sous K-ev $K[x]$ de L engendré par $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de dimension finie.

b) Montrer que si $x \in L$ est algébrique sur K, alors $K[x]$ est un sous-corps de L. La réciproque est-elle vraie ?

c) En déduire que l'ensemble E des éléments de L algébriques sur K est un sous-corps de L.

4. On note $\overline{\mathbf{Q}}$ l'ensemble des nombres complexes qui sont algébriques sur $\mathbf{Q}$. On a vu (exercice 3) que c'était un sous-corps de $\mathbf{C}$.

a) Montrer que $\overline{\mathbf{Q}}$ est dénombrable.

b) Montrer que $\overline{\mathbf{Q}}$ est algébriquement clos; on observera que si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$, tous les coefficients a_i vérifient que le corps $\mathbf{Q}(a_i)$ est un $\mathbf{Q}$-ev de dimension finie.

c) Montrer que $\overline{\mathbf{Q}}$ est le plus petit corps algébriquement clos (inclus dans $\mathbf{C}$) qui contient $\mathbf{Q}$ ("clôture algébrique de $\mathbf{Q}$"). Étendre cette construction à un sous-corps K quelconque d'un corps algébriquement clos L.

d) $\overline{\mathbf{Q}}$ est-il un $\mathbf{Q}$-ev de dimension finie ?

5. Soit I un ensemble (pas forcément fini). Soit E un espace vectoriel sur un corps K, admettant une base $(e_i)_{i\in I}$. A-t-on E isomorphe à K^I ? Et que dire du dual E^* ?

6. Soit $(A, +)$ un groupe abélien. Soit p un nombre premier. On suppose que pour tout $x \in A$, on a $px = 0$. Donner la structure de A si A est fini. Que peut-on dire si A est infini ?

7. Soit E l'ensemble des matrices complexes $A \in M_2(\mathbf{C})$ qui vérifient : $A^* = A$ et $\operatorname{Tr} A = 0$, où A^* désigne la matrice adjointe de A. Est-ce que E est un espace vectoriel ? Si oui, donner sa dimension.

8. (À réserver à ceux qui ont déjà entendu parler de modules). Bien qu'à peu près tous les résultats de la théorie de la dimension tombent en défaut si on remplace le corps K par un anneau commutatif A (la notion analogue à celle de K-espace vectoriel s'appelle alors A-*module*), il subsiste quelques énoncés. Dans toute la suite, A est un anneau commutatif *non nul* (mais qu'on ne suppose pas intègre, ce qui complique certaines preuves).

a) Soit $f : A^r \to A^s$ une application linéaire surjective entre les A-modules A^r et A^s. Alors $r \geq s$. Pour cela, on montrera d'abord que si I est un idéal de A, f induit une application linéaire surjective entre les A/I-modules $(A/I)^r$ et $(A/I)^s$, puis on choisira bien I.

b) En déduire que si M est un module sur un anneau commutatif $A \neq 0$ qui admet une base finie, toutes les bases ont le même cardinal (on dit alors que M est un module *libre* de rang ce cardinal). Donner un exemple avec $A = \mathbf{Z}$ de module qui n'admet pas de base, et aussi de sous-module strict d'un module libre de rang 1 qui est encore libre de rang 1 (remarque : quand A est principal, il reste vrai qu'un sous-module d'un module libre de rang r est libre de rang $\leq r$).

c) Soit $f : A^r \to A^r$ une application linéaire, de matrice P dans la base canonique. Montrer que f est surjective si et seulement si $\det P$ est inversible dans A, et que ceci est équivalent à f bijective.

d) (difficile) On garde les notations de c). Montrer que f est injective si et seulement si $\det P$ n'est pas diviseur de zéro dans A (si $\det P = a$ est diviseur de zéro, on fixera b non nul dans A tel que $ab = 0$, et on considérera un mineur m de taille maximale s dans P tel que $mb \neq 0$; puis on construira un vecteur colonne non nul annulé par P à partir de mineurs de taille s de P).

e) En déduire que si $s > r$, une application linéaire de A^s dans A^r n'est pas injective.

f) Montrer que si un A-module M est engendré par une famille de r éléments, alors toute famille comportant au moins $r+1$ éléments dans M est liée.