141. Polynômes irréductibles, corps de rupture : questions

1. Soit K un corps fini de cardinal q. Soit $d > 0$ un entier.

a) Montrer qu'il existe une extension de corps L de K de degré d, unique à isomorphisme près.

b) On rappelle que le groupe multiplicatif L^* est cyclique. Soit α un générateur de ce groupe. Montrer que $L = K[\alpha]$.

c) En déduire qu'il existe un polynôme irréductible P dans $K[X]$, avec $\deg P = d$ (remarque : trouver explicitement un tel P est un problème algorithmique difficile !).

2. (Sorte de réciproque de l'exercice 1) . Soit K un corps fini de cardinal q. Soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré d. Soit $L = K[\alpha]$ un corps de rupture de P.

a) Montrer que l'application $F : x \mapsto x^q$ est un automorphisme du corps L qui induit l'identité sur K. On note $F^m = F \circ F \circ ... \circ F$ le m-ième itéré de F.

b) Montrer que d est le plus petit entier $m > 0$ tel que $F^m(\alpha) = \alpha$ (raisonner par l'absurde, en montrant que si on avait $m < d$, alors α appartiendrait à une extension de corps de K strictement incluse dans L).

c) En déduire que L est aussi un corps de décomposition de P.

d) On pose $K = \mathbf{F}_4$ et $L = \mathbf{F}_{16}$, corps respectivement à 4 et à 16 éléments. Montrer que L est une extension de degré 2 de F qui peut s'écrire $L = K[\alpha]$, où α est un élément d'ordre 5 de L^* (ici α n'est donc pas un générateur de L^*).

3. Un corps de de caractéristique $p > 0$ est dit *parfait* si le morphisme de corps $x \mapsto x^p$ de K dans K est bijectif (par convention, tout corps de caractéristique zéro est parfait).

a) Montrer que tout corps fini est parfait mais que le corps $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(T)$ est imparfait.

b) Soit K un corps de caractéristique p imparfait, on choisit $a \in K$ qui n'est pas de la forme b^p avec $b \in K$. Montrer que le polynôme $P = X^p - a$ est irréductible dans K, mais qu'il n'a qu'une racine (de multiplicité p) dans un corps de décomposition de K.

c) Montrer qu'un corps K est parfait si et seulement si : pour toute extension finie L de K et tout x de L, le polynôme minimal π de x sur K est à racines simples dans un corps de décomposition de π. En déduire que toute extension finie d'un corps parfait est parfait (voir l'exercice suivant pour une autre méthode).

4. Soit K un corps. Soit $\sigma : K \to K$ un automorphisme de K. Soit L un K-espace vectoriel.

a) Montrer que $(L, +)$, muni de la loi externe $(\alpha, x) \mapsto \sigma(\alpha).x$ est aussi un K-espace vectoriel, que l'on notera L'.

b) Montrer que si L est de dimension finie d, alors L' est aussi de dimension d.

c) En déduire que si K est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, toute extension finie de K est un corps parfait.

d) Le résultat de c) reste-t-il vrai pour une extension algébrique (pas forcément finie) ?