104. Groupes finis, exemple et applications : questions

1. Soit $K = \mathbf{F}_q$ un corps fini de cardinal q. On considère le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(K)$ et son sous-groupe $\mathrm{SL}_n(K)$.

a) Montrer que le centre de $\mathrm{GL}_n(K)$ (resp. de $\mathrm{SL}_n(K)$) est constitué des matrices scalaires de ce groupe.

b) On note $\mathrm{PGL}_n(K)$ (resp. $\mathrm{PSL}_n(K)$) le quotient de $\mathrm{GL}_n(K)$ (resp. $\mathrm{SL}_n(K)$) par son centre. Calculer les cardinaux de $\mathrm{SL}_n(K)$, $\mathrm{PGL}_n(K)$ et $\mathrm{PSL}_n(K)$.

2. (*isomorphismes exceptionnels*, suite du 1.) Soit n un entier. Soit E le K-ev K^n. On note $\mathbf{P}(E)$ l'ensemble des droite vectorielles de K^n (*espace projectif de dimension* $n-1$).

a) Montrer qu'il existe un morphisme injectif Φ de $\mathrm{PGL}_n(K)$ dans le groupe symétrique $\mathcal{S}(\mathbf{P}(E))$.

Dans toute la suite de cet exercice, on prend $n = 2$.

b) Montrer que $\mathbf{P}(E)$ est de cardinal $q+1$; on identifie Φ à un morphisme $\mathrm{PGL}_2(K) \to \mathcal{S}_{q+1}$.

c) On prend $q = 2$. Montrer que Φ induit des isomorphismes de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_2)$ sur $\mathcal{S}_3$.

d) On prend $q = 3$. Montrer que Φ induit un isomorphisme de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_3)$ sur $\mathcal{S}_4$ et de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_3)$ sur $\mathcal{A}_4$. Les groupes $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_3)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ sont-ils isomorphes ?

e) On prend $q = 4$. Montrer que Φ induit des isomorphismes de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_4)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_4)$ sur $\mathcal{A}_5$.

f) On prend $q = 5$. Montrer que Φ induit un isomorphisme de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5)$ sur $\mathcal{S}_5$ et de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$ sur $\mathcal{A}_5$ (on rappelle que tout sous-groupe d'indice n de $\mathcal{S}_n$ est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$ pour $n \geq 5$, conséquence non triviale de la simplicité des groupes alternés).

3. Trouver un groupe fini G non réduit au neutre tel que : le centre de G est 1, le sous-groupe dérivé de G est G, mais G n'est pas simple.

4. Soit D le groupe diédral de cardinal 8 (groupe des isométries du carré). Calculer le centre, le sous-groupe dérivé, et l'abélianisé de D. Mêmes questions pour le groupe des quaternions H_8 d'ordre 8 (cf. feuille d'exercices 2, exercice 4).

5. Soit G un groupe fini tel que le quotient de G par son centre soit abélien. Le groupe G est-il toujours abélien ?

6. a) Quels sont les groupes finis G tels que tout élément x de G vérifie $x^2 = 1$?

b) Soit p un nombre premier. Soit G un groupe fini tel que pour tout $x \in G$, il existe un entier $m \in \mathbf{N}$ tel que $x^{p^m} = 1$. Le groupe G est-il forcément un p-groupe ?