101. Groupes opérant sur un ensemble : questions

1. Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit nombre premier divisant $\#G$. Soit H un sous-groupe de G d'indice p. On se propose de montrer que H est distingué dans G.

a) Montrer que H opère sur l'ensemble des classes à gauche G/H par $h.(aH) := (ha)H$ pour tout $h \in H$ et tout $a \in G$. Quel est le stabilisateur de aH ? Quelle est l'orbite de la classe H ?

b) Montrer que si H n'était pas distingué dans G, alors au moins l'une des orbites aurait un cardinal $\geq p$.

c) Conclure.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K.

a) On fait opérer le groupe linéaire $G := \mathrm{GL}(E)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E par : $g.F := g(F)$ pour tout $g \in G$ et tout sous-espace F de E. Quelles sont les orbites pour cette action ?

b) On prend $K = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ et $n = 5$. Combien E possède-t-il de sous-espaces vectoriels de dimension 3 ?

3. a) Combien y a-t-il au total d'opérations du groupe $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

b) Soient G et X deux groupes. On dit que G *opère par automorphismes* sur X si on s'est donnée une opération $(g, x) \mapsto g.x$ de G sur X telle que pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g.x$ soit un automorphisme de X. L'opération de G sur lui-même par translation est-elle une opération par automorphismes ? Même question pour l'opération par conjugaison.

c) On prend $G = (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, +)$ et $X = (\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}, +)$. Combien y a-t-il d'actions de G sur X par automorphismes ? Même question en remplaçant $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ par le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$.

4. Soit E un espace euclidien. On fait opérer son groupe orthogonal $O(E)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E.

a) Quelles sont les orbites pour cette action ?

b) Donner un énoncé analogue pour les espaces hermitiens.

5. Soit G un groupe. Soit $x_0 \in G$. On appelle *centralisateur* de x_0 l'ensemble G_{x_0} des éléments x de G vérifiant $xx_0 = x_0x$.

a) Montrer que G_{x_0} est un sous-groupe de G. Est-il toujours distingué ?

b) On suppose G fini. Soit C la classe de conjugaison de x_0. Trouver une relation entre $\#G$, $\#C$, et $\#G_{x_0}$.

6. Soient p un nombre premier et G un p-groupe fini. Soit $(A, +)$ un groupe abélien avec $A \neq \{0\}$. On suppose donnée une action de G sur A par automorphismes, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, la bijection $x \mapsto g.x$ de A dans A est un automorphisme du groupe abélien A. On suppose de plus que A est *de torsion p-primaire*, i.e. pour tout $x \in A$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p^m x = 0$.

a) Montrer que si A est fini, son cardinal est une puissance de p (on pourra utiliser la classification des groupes abéliens finis, ou encore le théorème de Sylow).

b) On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $x \neq 0$ dans A tel que pour tout $g \in G$, on ait $g.x = x$.

c) On ne suppose plus A fini. Soit $a \neq 0$ dans A. Montrer que le sous-groupe B de A engendré par $\{g.a, g \in G\}$ est fini.

d) En déduire que le résultat de b) vaut encore sans l'hypothèse A fini.