Exercices : groupes (III); Opérations de groupes

D. Harari

Agrégation

1. Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X. Pour tout $g \in G$, notons $\operatorname{Fix} g$ le sous-ensemble de X constitué des points fixes de g. On note H_x le stabilisateur de $x \in X$, et $\omega(x)$ son orbite.

a) Soit E l'ensemble des couples (g, x) de $G \times X$ qui vérifient $g.x = x$. Montrer que le cardinal de E est $\sum_{x \in X} \# H_x$.

b) En déduire que

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{\# \, \omega(x)} = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \#(\operatorname{Fix} g),$$

et que ce nombre est aussi le nombre d'orbites pour l'action de G sur X (*formule de Burnside*).

c) Soit $P_n(k)$ le nombre de permutations de $\{1, ..., n\}$ qui ont exactement k points fixes. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k P_n(k) = n!$ (cette dernière question était un exercice des olympiades de La Havane en 1987...).

2. Soit σ une permutation de $E = \{1, ..., n\}$. En faisant opérer le sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ de $\mathcal{S}_n$ sur E, retrouver l'existence de la décomposition de σ en produit de cycles dont les supports sont disjoints.

3. a) Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué de G, on note $\pi : G \to G/H$ la surjection canonique. Soit B un sous-groupe de G/H, on pose $A = \pi^{-1}(B)$. Montrer que l'indice $[G : A]$ de A dans G est égal à l'indice $[G/H : B]$ de B dans G/H.

Dans toute la suite, p désigne un nombre premier.

b) Soit G un groupe abélien de cardinal p^α avec $\alpha \geq 1$. Montrer que G possède un sous-groupe d'indice p (on commencera par traiter le cas où G

est cyclique ; si G n'est pas cyclique, on raisonnera par récurrence sur α et on utilisera a)).

c) Soit G un groupe non-abélien de cardinal p^α avec $\alpha \geq 1$. Montrer que G possède un sous-groupe distingué d'indice p (on procèdera par récurrence sur α et on appliquera a) en prenant pour H le centre de G).

d) Soit G un groupe fini de cardinal p^α avec $\alpha \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout $i \in \{0, ..., \alpha\}$, G possède un sous-groupe G_i de cardinal p^i.

e) Soit G un groupe fini d'ordre $p^\alpha.m$ avec $\alpha \in \mathbf{N}$ et m premier avec p. Montrer que pour tout $i \in \{0, ..., \alpha\}$, G possède un sous-groupe de cardinal p^i.

4. Soient p un nombre premier et G un p-groupe fini. Soit $(A, +)$ un groupe abélien avec $A \neq \{0\}$. On suppose donnée une action de G sur A par automorphismes, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, la bijection $x \mapsto g.x$ de A dans A est un automorphisme du groupe abélien A. On suppose de plus que A est *de torsion p-primaire*, i.e. pour tout $x \in A$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p^m x = 0$.

a) Montrer que si A est fini, son cardinal est une puissance de p (on pourra utiliser la classification des groupes abéliens finis, ou encore le théorème de Sylow).

b) On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $x \neq 0$ dans A tel que pour tout $g \in G$, on ait $g.x = x$.

c) On ne suppose plus A fini. Soit $a \neq 0$ dans A. Montrer que le sous-groupe B de A engendré par $\{g.a, g \in G\}$ est fini.

d) En déduire que le résultat de b) vaut encore sans l'hypothèse A fini.