Exercices : groupes (I); Généralités

D. Harari

Agrégation

1. Soit G le groupe abélien $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, muni de la loi $+$, qu'on peut aussi voir comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

a) Montrer que si $f : G \to G$ est un morphisme de groupes, alors f est aussi un morphisme de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espaces vectoriels.

b) En déduire que le groupe $\mathtt{Aut}\, G$ des automorphismes du groupe G est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (il est donc non commutatif, bien que G le soit).

2. Soit G un groupe. Les applications suivantes de G dans G sont-elles toujours des morphismes ?

a) $x \mapsto ax$, où $a \in G$ est fixé.
b) $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
c) $x \mapsto x^{-1}$.

3. a) Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes d'un groupe G est aussi un sous-groupe.

b) Soient A et B deux sous-groupes d'un groupe G. Montrer que $A \cup B$ n'est pas un sous-groupe, sauf si on a $A \subset B$ ou $B \subset A$.

4. Soit K un corps. Soit A une partie de $M_n(K)$ telle que A soit un groupe pour la multiplication des matrices. A est-elle toujours un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$?

5. Soit $(A, +)$ un groupe abélien.

a) Soit $n > 0$. Montrer que l'ensemble $A[n] := \{x \in A, nx = 0\}$ est un sous-groupe de A, appelé *sous-groupe de n-torsion* de A.

b) Montrer que $A_{\mathrm{tors}} := \bigcup_{n>0} A[n]$ est un sous-groupe de A, appelé *sous-groupe de torsion* de A.

c) Quel est le cardinal de A_{tors} lorsque $A = \mathbf{R}$? Lorsque $A = K$, où K est un corps commutatif quelconque ?

6. Montrer que le groupe additif $\mathbf{Q}$ n'est pas engendré par une partie finie.

7. Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $aH \mapsto Ha^{-1}$ est une bijection de l'ensemble G/H des classes à gauche sur l'ensemble $H \setminus G$ des classes à droite. Le cardinal de ces ensembles, s'il est fini, se note $[G : H]$ et s'appelle *l'indice* de H dans G (c'est aussi l'ordre du groupe G/H si H est distingué dans G).

8. Soit G un groupe.

a) Montrer que si H est distingué dans G. alors on a $f(H) = H$ pour tout automorphisme intérieur f de G.

b) Montrer qu'une intersection de sous-groupes distingués est encore un sous-groupe distingué.

c) On prend $G = \mathcal{S}_4$. On fixe une double transposition τ de G. Soit H le sous-groupe de G constitué de l'identité et des doubles transpositions. Soit K le sous-groupe $\{\mathrm{id}, \tau\}$ de G. Montrer que $K \lhd H$, $H \lhd G$, mais K n'est pas distingué dans G.

d) Soient H un sous-groupe de G et K un sous-groupe caractéristique de H. Montrer que si H est caractéristique (resp. distingué), dans G, alors K est caractéristique (resp. distingué) dans G.

9. Soient H et N deux groupes. On dit qu'un groupe E est une *extension* de H par N s'il existe un morphisme surjectif $E \to H$ dont le noyau est isomorphe à N (voir aussi l'exercice 3 de la feuille II). Montrer que les groupes $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ sont tous deux des extensions de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

10. Soit $n \geq 3$. Montrer que le centre de $\mathcal{S}_n$ est réduit à l'identité (Utiliser la formule $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a), \sigma(b))$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\tau = (a, b)$ transposition).