Exercices : groupes (III); Opérations de groupes

D. Harari

Agrégation

1. a) Pour chaque $x \in X$, l'image réciproque E_x de x par la projection $p : E \to X$ a pour cardinal $\# H_x$. Comme les E_x constituent une partition de E, le cardinal de E est $\sum_{x \in X} \# H_x$.

b) On peut aussi déterminer le cardinal de E en considérant l'autre projection $E \to G$, ce qui donne $\# E = \sum_{g \in G} (\# \operatorname{Fix} g)$. En comparant avec a), on obtient

$$\sum_{x \in X} \# H_x = \sum_{g \in G} \# (\operatorname{Fix} g),$$

mais $\# H_x = \# G / \# \omega(x)$, d'où en divisant par le cardinal de G :

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{\# \omega(x)} = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \# (\operatorname{Fix} g).$$

Par ailleurs $\sum_{x \in X} \frac{1}{\# \omega(x)}$ est aussi le nombre d'orbites, puisque si $\omega_1, ..., \omega_r$ sont les orbites, alors en regroupant les éléments de X par orbites, on obtient :

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{\# \omega(x)} = \sum_{i=1}^{r} (\# \omega_i)(\frac{1}{\# \omega_i}) = \sum_{i=1}^{r} 1 = r.$$

c) On considère l'opération naturelle de $G = \mathcal{S}_n$ sur $E = \{1, ..., n\}$. Il n'y a qu'une orbite et le cardinal de $\operatorname{Fix} g$ est le nombre de points fixes de la permutation g. Ainsi, en regroupant les éléments de G par leur nombre de points fixes, on a :

$$\sum_{g \in G} \# (\operatorname{Fix} g) = \sum_{k=0}^{n} k P_n(k),$$

qui vaut aussi 1 par la formule de Burnside, d'où le résultat.

2. On écrit simplement la partition de E en ses orbites pour l'action de $G = \langle \sigma \rangle$. La permutation σ agit alors comme un cycle sur chaque orbite, et il est alors immédiat que σ est le produit des cycles correspondants, puisque ces orbites sont deux à deux disjointes.

3. a) Considérons l'application f de l'ensemble des classes à gauche G/A sur l'ensemble des classes à gauche $(G/H)/B$ donnée par $f(gA) = \pi(g)B$. Elle est bien définie car si g_1, g_2 sont deux représentants d'une même classe de G/A, alors $g_1^{-1}g_2 \in A$, d'où $\pi(g_1^{-1}g_2) \in B$, ce qui donne que $\pi(g_1)$ et $\pi(g_2)$ ont la même classe dans $(G/H)/B$. Il est immédiat que f est surjective, et elle est injective car si $f(g_1) = f(g_2)$, alors $\pi(g_1^{-1}g_2) \in B$, ce qui signifie que $g_1^{-1}g_2 \in A$, donc que $g_1A = g_2A$. Noter que l'hypothèse G finie n'est pas indispensable.

b) Si G est cyclique de cardinal p^α, le résultat résulte de ce que G possède un (unique) sous-groupe de cardinal d pour tout diviseur d de p^α, donc en particulier pour $d = p^{\alpha-1}$. Si G n'est pas cyclique, le sous-groupe H engendré par un élément non trivial a pour cardinal p^β avec $0 < \beta < \alpha$. L'hypothèse de récurrence (le cas $\alpha = 1$ étant trivial) dit que G/H possède un sous-groupe d'indice p, donc c'est aussi le cas de G via a).

c) On sait que le centre Z de G est non trivial, et il est aussi distinct de G puisque G est non abélien. En raisonnant par récurrence sur α, on peut alors supposer que G/Z possède un sous-groupe d'indice p, donc G aussi d'après a).

d) Cela résulte de b) et c), en raisonnant par récurrence descendante sur i.

e) Cela résulte de d) et du premier théorème de Sylow.

4. a) Si le cardinal de A possèdait un diviseur premier $\ell \neq p$, alors d'après le théorème de Sylow A contiendrait un ℓ-groupe non trivial, et donc un élément d'ordre ℓ^r avec $r > 0$. Comme par hypothèse l'ordre de tout élément de A est une puissance de p, on obtiendrait une contradiction. On peut aussi utiliser le fait (théorème de structure) que A est isomorphe à un produit $\prod_{i=1}^m \mathbf{Z}/d_i$, avec $d_1|d_2|...|d_r$, et l'hypothèse que A est de torsion p-primaire impose que tous les d_i sont des puissances de p, donc le cardinal de A aussi.

b) L'équation aux classes donne que le cardinal de A est la somme du nombre f de point fixes pour l'action de G et des cardinaux des orbites non réduites à un point. Le cardinal d'une telle orbite divise celui de G, donc est une puissance de p autre que 1 vu que G est un p-groupe. Ainsi, en utilisant a), f est divisible par p et en particulier $f \geq 2$. Il y a donc au moins un point fixe autre que 0.

c) Par hypothèse, le groupe B est abélien et engendré par une partie finie $S := \{g.a, g \in G\}$. De plus tout élément x de S est annulé par une puissance de p, donc comme S est fini il existe un entier $m > 0$ (puissance de p) tel que $mx = 0$ pour tout $x \in S$. On voit alors que si $S = \{s_1, ..., s_r\}$, alors B est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme

$$a_1 s_1 + ... + a_r s_r,$$

avec $0 \leq a_i < m$, ce qui montre que B est fini.

d) On observe que S est stable pour l'action de G, donc B l'est également puisque G opère par automorphismes. Il suffit d'appliquer alors b) à B.