Corrigé de la feuille d'exercices groupes I

D. Harari

Agrégation

1. a) On a déjà $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous x, y de G par définition d'un morphisme de groupes, et de même $f(nx) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Cette dernière égalité donne en passant au quotient $f(\bar{n}x) = \bar{n}f(x)$, où $\bar{n}$ est la classe de n dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, ce qui montre que f est bien un morphisme de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-ev. Noter que de même, si A et B sont des groupes abéliens tels que $px = 0$ pour tout $x \in (A \cup B)$ (où p est un nombre premier), alors tout morphisme de groupes de A vers B est automatiquement un morphisme de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-ev.

b) D'après a), le groupe S est aussi le groupe des automorphismes du $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-ev G, qui est de dimension 2. Il est donc isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Noter qu'il est aussi isomorphe à $\mathcal{S}_3$, car non abélien et de cardinal $(2^2-1)(2^2-2) = 6$.

2. a) Non : en effet $a(xy) \neq axay$ (sauf si $a = 1$).

b) Pas en général si G n'est pas abélien. Déjà pour $n = 2$, on n'a pas $(xy)^2 = x^2y^2$ si x ne commute pas avec y.

c) Non plus si G n'est pas abélien, vu que l'inverse de xy n'est pas $x^{-1}y^{-1}$ mais $x^{-1}y^{-1}$.

3. a) Vérification immédiate.

b) Supposons qu'on ait $x \in A$ et $y \in B$ avec $x \notin B$ et $y \notin A$. Alors xy ne peut pas être dans A (sinon $y \in A$) ni dans B (sinon $x \in B$), donc $A \cup B$ n'est pas un groupe.

4. Mais non ! Considérer en effet par exemple le sous-ensemble G de $M_2(K)$ constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a \in K^*$. Il s'agit bien d'un groupe pour la multiplication, mais pas d'un sous-groupe de $GL_2(K)$, le neutre de G étant la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et non pas I_2.

5. a) Vérification immédiate.

b) En général une réunion de sous-groupes n'est pas un sous-groupe. Mais ici si $x \in A[n]$ et $y \in A[m]$, alors x et y sont tous deux dans $A[mn]$, et donc aussi $x + y$. Les autres vérifications sont faciles.

c) Pour $A = \mathbf{R}$, ou plus généralement un corps de caractéristique zéro, on a $A_{\text{tors}} = \{0\}$. Par contre pour un corps de caractéristique $p > 0$, on a $A = A[p] = A_{\text{tors}}$.

6. Soit $S = \{a_1, ..., a_r\}$ une partie finie de $\mathbf{Q}$. Écrivons chaque a_i sous forme $a_i = b_i/c_i$ avec $b_i \in \mathbf{Z}$ et $c_i \in \mathbf{N}^*$. Alors tout élément x du sous-groupe engendré par $(a_1, ..., a_r)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers des a_i, d'où $x = y/z$ avec $z = c_1...c_r$ et $y \in \mathbf{Z}$. Choisissons un nombre premier p ne divisant aucun des c_i. Le rationnel $1/p$ ne peut pas s'écrire sous la forme ci-dessus (sinon on aurait $z = py$ et p diviserait $c_1...c_r$), donc il n'est pas dans le sous groupe engendré par S.

7. Soit φ l'application en question. Elle est bien définie car si $aH = bH$, alors $a^{-1}b = a^{-1}(b^{-1})^{-1} \in H$, ce qui implique que $Ha^{-1} = Hb^{-1}$. Il est alors clair que φ est bijective, de réciproque $Ha \mapsto a^{-1}H$.

8. a) Si H est distingué dans G et $a \in G$, alors on a $aHa^{-1} \subset H$, mais aussi $a^{-1}Ha \subset H$ d'où finalement $aHa^{-1} = H$.

b) C'est immédiat.

c) On note que H est abélien, donc $K \lhd H$ est automatique. Si $\tau = (a,b)(c,d)$ est une double transposition et $\sigma \in G$, on sait que $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a), \sigma(b))(\sigma(c), \sigma(d))$ est encore une double transposition (et bien sûr, tout conjugué de l'identité est l'identité), ce qui montre que $H \lhd G$. Par contre, si on choisit σ telle que $\sigma(a) = a$ et $\sigma(b) = c$, on voit que $\sigma\tau\sigma^{-1}$ n'est plus dans le sous-groupe K, celui-ci n'est donc pas distingué dans G.

d) Soit u un automorphisme de H. Comme K est caractéristique dans H, il est stable par u, d'où un morphisme obtenu par restriction de K dans K. Comme u^{-1} laisse également stable le sous-groupe caractéristique K de H, la restriction (notée encore u) de u à K induit un automorphisme de K. Si maintenant H est caractéristique (resp. distingué) dans G, alors tout automorphisme (resp. tout automorphisme intérieur) v de G induit par restriction un automorphisme u de H (noter par contre que même si v est un automorphisme intérieur de G, u n'est pas forcément un automorphisme intérieur de H, cf. a). Comme K est caractéristique dans H, il est stable par u. Ainsi K est caractéristique (resp. distingué) dans G.

9. L'application de $Z/4\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui envoie la classe de x mod. 4 sur la classe de x mod. 4 est clairement un morphisme surjectif, dont le noyau $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2$. Par ailleurs, la première projection de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est aussi un morphisme surjectif de noyau isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Notons qu'on a donc deux extensions de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui ne sont pas isomorphes.

10. Soit σ une permutation autre que l'identité. Choisissons a tel que $\sigma(a) = b \neq a$. Soit c dans $[1, n]$ avec c distinct de a et b. soit $\tau = (a, c)$, alors $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a), \sigma(c)) = (b, \sigma(c)) \neq \tau$. Ainsi, σ n'est pas dans le centre de $\mathcal{S}_n$.