171. Formes quadratiques réelles: indications de solutions

1. Si q_1 n'est pas définie, alors $\det A = 0$ et le résultat est clair puisque B est positive; on peut donc supposer q_1 définie positive, ce qui permet d'utiliser le théorème de réduction simultanée : il existe P inversible avec ${}^tPAP = \mathrm{Diag}(a_1, ..., a_n)$ et ${}^tPBP = \mathrm{Diag}(b_1, ..., b_n)$, les a_i et les b_i étant des réels positifs. L'hypothèse $q_2(x) \geq q_2(x)$ (appliquée aux vecteurs de la base de diagonalisation) donne $a_i \leq b_i$ pour tout i, donc $a_1...a_n \leq b_1...b_n$, d'où on déduit immédiatement $\det A \leq \det B$ vu que $(\det P)^2$ est un réel positif.

2. a) Si A est symétrique, soient $a_1, ..., a_n$ ses valeurs propres (pas forcément distinctes), qui sont réelles vu que A est diagonalisable. Alors $\Phi(A) = \sum_{i=1}^n a_i^2$ est ≥ 0, et n'est nul que si tous les a_i sont nuls, ce qui implique $A = 0$ puisque A est diagonalisable. Ainsi la restriction de Φ à $S_n(\mathbf{R})$ est définie positive, sa signature est $(n(n+1)/2, 0)$.

b) Si A est dans $A_n(\mathbf{R})$ (les matrices antisymétriques), alors iA est hermitienne (donc diagonalisable avec des valeurs propres réelles), d'où (même raisonnement qu'en a) $\mathrm{Tr}\,((iA)^2) \geq 0$ (et cette quantité n'est nulle que si $iA = 0$, i.e. $A = 0$), ce qui donne que la restriction de Φ à $A_n(\mathbf{R})$ est définie négative, ou encore de signature $(0, n(n-1)/2)$.

c) Par le théorème de Sylvester, a) et b) donnent que la signature de Φ est $((n(n+1)/2, n(n-1)/2)$ vu que $n(n+1)/2 + n(n-1)/2) = n^2 = \dim M_n(\mathbf{R})$.

3. Soient A et B les matrices correspondantes dans une base. Si on a diagonalisation simultanée des deux formes, il existe P inversible avec ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ diagonales, ce qui implique $A^{-1}B$ diagonalisable. Il suffit donc de trouver A et B symétriques et inversibles avec AB non diagonalisable (quitte à changer A en A^{-1}). On peut prendre par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres ne sont pas réelles (le polynôme caractéristique est X^2+1).

4. a) La réduction de Gauss donne

$$q(x,y,z) = (1+\sqrt{2})(x+y)^2 - y^2 - 3z^2,$$

d'où on déduit facilement le résultat.

b) D'après a), la signature de q est $(1,2)$, ce qui rend le résultat évident, la forme q étant isomorphe sur $\mathbf{R}$ à $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

c) D'après a), on est ramené par changement de base à l'équation

$$(1+\sqrt{2})x^2 - y^2 - 3z^2 = 0.$$

Soit φ l'automorphisme du corps K qui envoie tout $a+b\sqrt{2}$ (avec $a,b \in \mathbf{Q}$) sur $a-b\sqrt{2}$. Si on avait une solution non triviale dans K^3, en appliquant φ il en irait de même de l'équation

$$(1-\sqrt{2})(x+y)^2 - y^2 - 3z^2 = 0.$$

Or, cette équation n'a pas de solution non triviale dans $K \subset \mathbf{R}$, vu que $(1-\sqrt{2})$, -1, et -3 sont tous < 0.

5. Noter que si S est la matrice de q dans une base de $\mathbf{R}^n$, le groupe $O(q)$ des isométries pour q est isomorphe à celui des matrices O vérifiant ${}^tOSO = S$. En effet cette condition signifie que pour tout vecteur colonne X, on a

$${}^t(OX)S(OX) =^t XSX.$$

a) Ce cas correspond à $S = I$ ou $S = -I$, et le groupe $SO(q)$ est donc isomorphe au groupe $SO_n(\mathbf{R})$ des matrices O de déterminant 1 vérifiant ${}^tOO = I$. Il est classique que ce groupe est connexe (pour relier une matrice de $SO_n(\mathbf{R})$ à I par un chemin continu, on utilise la réduction des isométries de $\mathbf{R}^n$ pour le produit scalaire canonique) et compact (comme fermé dans $O_n(\mathbf{R})$, lequel est fermé borné dans $M_n(\mathbf{R})$).

b) Prenons $n = 2$ et

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul donne que $O(q)$ correspond aux matrices

$$O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vérifiant : soit $a = d = 0$ et $bc = 1$, soit $b = c = 0$ et $ad = 1$. Le premier cas donne des matrices de déterminant -1 et non pas 1. Ainsi, $SO(q)$ correspond finalement aux matrices de la forme

$$O = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbf{R}^*$. Il est alors clair que ce groupe n'est ni compact (a n'est pas borné) ni connexe (son image par l'application continue qui envoie une matrice sur son coefficient en haut à gauche est $\mathbf{R}^*$, lequel n'est pas connexe).