158. Matrices symétriques, matrices hermitiennes : solutions

1. a) Non : la transposée de AB est BA vu que A et B sont symétriques, donc dès que A et B ne commutent pas, AB n'est pas symétrique.

b) On a $AB = R^2B = R(RB) = R(RBR)R^{-1}$. Noter en effet que R est inversible vu que A l'est.

c) D'après b), AB est semblable à la matrice symétrique RBR, donc est diagonalisable.

d) Le théorème de réduction simultanée dit qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A =^t PP$ et $B =^t PDP$. On observe alors que $A^{-1}B = P^{-1}DP$ est diagonalisable. Pour conclure, il suffit d'appliquer ce qu'on vient de voir en changeant A en a^{-1}.

e) Non : prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et cherchons B sous la forme $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable pour $a = 0$ et $b \neq 0$.

2. En regardant la matrice A d'un tel endomorphisme dans une base orthonormée où il diagonalise, la condition s'écrit $A = A^*$ et $A^*A = I$, avec A diagonale, dont les valeurs propres sont à la fois réelles et de module 1, i.e. égales à -1 ou 1. Il s'agit donc des symétries orthogonales.

3. C'est immédiat en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, dont on vérifiera que la preuve marche encore pour q positive et pas forcément définie positive (par contre le fait que le cas d'égalité ne survienne que pour deux vecteurs liés dans $\mathbf{R}_+$ est spécifique au cas défini positif). On peut aussi diagonaliser la forme q pour se ramener au cas où q est donnée par

$$q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

avec les λ_i dans $\mathbf{R}_+$, après quoi il est facile de voir que si par exemple les r premiers λ_i sont > 0 et les autres nuls, le cône et le noyau de q consistent tous deux en l'espace engendré par les r premiers vecteurs de la base.

4. a) On voit tout de suite que J est de rang 1, donc on a la valeur propre 0 avec multiplicité au moins $n-1$; la dernière valeur propre est n car $\mathrm{Tr}\, J = n$.

b) On observe que $s(A) = \mathrm{Tr}\,(AJ)$. Comme J est symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée et d'après a), on a donc une matrice orthogonale O telle que $J = ODO^{-1}$ avec $D = \mathrm{Diag}(n, 0, ..., 0)$. Pour A orthogonale, on a

$$\mathrm{Tr}\,(AJ) = \mathrm{Tr}\,(AODO^{-1}) = \mathrm{Tr}\,((O^{-1}AO)D).$$

Comme $A \mapsto O^{-1}AO$ est une bijection de $O_n(\mathbf{R})$ sur lui-même, on est ramené à chercher le sup de $\mathrm{Tr}\,(AD)$ pour A orthogonale. Cette quantité vaut na_{11}, ce qui donne que le sup vaut n (il est atteint par exemple pour l'identité), vu qu'une matrice orthogonale a tous ses coefficients de valeur absolue ≤ 1.

5. a) On sait que A et B sont diagonalisables, et elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités) car $\varphi : x \mapsto x^{2019}$ est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

b) On observe que

$$A^{2019} = PB^{2019}P^{-1} = PA^{2019}P^{-1}.$$

Ainsi P commute avec A^{2019}, donc laisse stable ses sous-espaces propres. En diagonalisant A, on voit que les sous-espaces propres de A et A^{2019} sont les mêmes (toujours parce que φ est bijective), puis que P commute avec A (c'est le cas sur chaque sous-espace propre, et la somme de ces espaces est $\mathbf{R}^n$ tout entier). Finalement $A = B$ vu que $B = P^{-1}AP$.

c) Oui, à condition de remplacer "symétriques" par hermitiennes. La preuve est la même, l'important étant de noter que les valeurs propres restent réelles.