181. Barycentres, convexité : questions

1. Soient A, B, C, D quatre points de l'espace euclidien $V = \mathbf{R}^3$ de dimension 3, se trouvant sur une sphère S de rayon 1. On suppose que

$$AB.AC.AD.BC.BD.CD = \frac{2^9}{3^3}.$$

Pour tout $M \in V$, on pose

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2.$$

a) Trouver une minoration de

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2,$$

et la traduire avec la fonction f.

b) Montrer que si on appelle O le centre de la sphère S, alors O est l'équibarycentre de A, B, C, D.

c) Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier.

2. On rappelle qu'un point x d'un convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel est dit *extrémal* si l'égalité $x = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ avec $\lambda \in]0, 1[$ et $y_1, y_2 \in C$ implique $x = y_1 = y_2$.

a) Trouver les points extremaux de la boule unité de $\mathbf{R}^2$ pour la norme euclidienne et pour la norme sup.

b) Soit E un e.v.n. sur $\mathbf{R}$. Soit C un convexe compact non vide de E. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes convexes non vides K de C vérifiant :

(*) pour tout $x \in K$, si $x = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ avec $\lambda \in]0, 1[$ et $y_1, y_2 \in C$, alors $y_1, y_2 \in K$.

Montrer que $\mathcal{K}$ admet un élément minimal pour l'inclusion (utiliser le lemme de Zorn).

c) Montrer qu'une partie non vide S de E est réduite à un point si et seulement si pour toute forme linéaire continue f sur E, $f(S)$ est réduit à un point.

d) En utilisant b) et c), montrer que C admet un point extremal.

3. Soit E un e.v.n. réel. Soit K une partie de E vérifiant : si $x, y \in K$, alors $\frac{x+y}{2} \in K$.

a) Montrer que si K est fermé, alors K est convexe.

b) Le résultat de a) vaut-il encore si K n'est pas fermé ?

c) Traduire le a) en terme de fonctions convexes.

4. Soit K un compact convexe de $E = \mathbf{R}^n$ admettant 0 comme point intérieur.

a) Montrer qu'on peut définir une application $p : E \to \mathbf{R}_+$ par

$$p(x) = \inf \{t \in \mathbf{R}_+^*, x/t \in K\},$$

et vérifier que $p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

b) Montrer que $p(x) \leq 1$ si et seulement si $x \in K$.

c) Vérifier que pour tout $x \in E$ et tout $\alpha > 0$, on a $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ et que pour tous $x, y \in E$, on a $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

d) Montrer que p est lipschitzienne (donc continue).

e) Soit K' un autre compact convexe contenant 0 comme point intérieur, on note p' l'application associée à K' comme ci-dessus. Montrer que

$$\psi : K \to K', x \mapsto \frac{p(x)}{p'(x)}.x$$

(on convient que $\psi(0) = 0$) est un homéomorphisme de K sur K'.

f) Deux compacts convexes d'intérieurs non vides de $\mathbf{R}^n$ sont-ils toujours homéomorphes ?

g) Un ouvert convexe non vide de $\mathbf{R}^n$ est-il homéomorphe à $\mathbf{R}^n$?

5. On considère un triangle non aplati ABC dans le plan affine usuel $\mathbf{R}^2$. Soit M un point du plan. On note (α, β, γ) un système de coordonnées barycentriques de P dans le repère (A, B, C), i.e. on a

$$\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = 0$$

avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

a) Montrer qu'on peut prendre $\alpha = \det(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC})$, $\beta = \det(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA})$, $\gamma = \det(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$, où det désigne le déterminant dans une base quelconque de $\mathbf{R}^2$. Que vaut $\alpha + \beta + \gamma$ si la base choisie est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

b) On suppose le plan muni d'un produit scalaire euclidien. Déterminer des coordonnés barycentriques pour l'orthocentre de ABC, le centre de son cercle inscrit et le centre de son cercle circonscrit, en fonction des trois angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.