171. Formes quadratiques réelles: questions

1. Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $0 \leq q_1(x) \leq q_2(x)$. On fixe une base de E et on désigne par A et B les matrices respectives de q_1 et q_2 dans cette base. Montrer que $\det A \leq \det B$.

2. Soit Φ la forme bilinéaire symétrique définie sur $M_n(\mathbf{R})$ par $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(AB)$.

a) Quelle est la signature de la restriction de Φ au sous-espace des matrices symétriques ?

b) Même question en remplaçant symétriques par antisymétriques.

c) En déduire la signature de Φ.

3. Donner un exemple de deux formes quadratiques non dégénérées φ et ψ sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, telles qu'il n'existe pas de base orthogonale à la fois pour φ et ψ.

4. Soit K le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. On considère la forme quadratique sur K^3 définie par

$$q(x, y, z) = (1 + \sqrt{2})x^2 + 2(1 + \sqrt{2})xy + \sqrt{2}y^2 - 3z^2 = 0.$$

a) Montrer que la forme q est équivalente sur K à la forme dont la matrice dans la base canonique de K^3 est $\mathrm{Diag}(1 + \sqrt{2}, -1, -3)$.

b) Montrer que l'équation $q(x, y, z) = 0$ a une solution non triviale dans $\mathbf{R}^3$.

c) Cette équation a-t-elle une solution non triviale dans K^3 ?

5. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $E = \mathbf{R}^n$. On note $\mathrm{SO}(q)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ constitué des isométries (pour la forme q) de déterminant 1. On le munit de la topologie induite par celle de $M_n(\mathbf{R})$.

a) On suppose q définie. Montrer que $\mathrm{SO}(q)$ est compact et connexe.

b) Que se passe-t-il si q n'est plus supposée définie ?