154. Sous-espaces stables : questions

On désigne toujours par K un corps et par E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. On pourra utiliser les résultats sur les invariants de similitude vus dans la leçon.

a) Soit L une extension de corps de K. Soient A et B deux matrices de $M_n(K)$. Montrer que si elles sont semblables dans $M_n(L)$, elles sont semblables sur $M_n(K)$.

b) Montrer que toute matrice de $M_n(K)$ est semblable à sa transposée.

c) Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Montrer que le polynôme caractéristique χ_u de u et le polynôme minimal π_u de u ont les mêmes facteurs irréductibles dans $K[X]$.

d) Montrer que le commutant de toute matrice de $M_n(K)$ est de dimension $\geq n$.

e) Faire le lien entre la décomposition en sous-espaces cycliques et la réduction de Jordan quand le polynôme caractéristique est scindé; par exemple donner la réduction de Jordan de la matrice $\mathrm{Diag}(C(X^2), C(X^2(X-1)^3)$, où $C(P)$ désigne la matrice compagnon d'un polynôme P. On pourra d'abord comparer les matrices $C(PQ)$ et $\mathrm{Diag}(C(P), C(Q))$ quand P et Q sont deux polynômes premiers entre eux.

f) On dit qu'un endomorphisme u de E est *irréductible* si $\dim E \geq 1$ et les seuls sous-espaces de E stables par u sont E et $\{0\}$. Montrer que u est irréductible si et seulement si son polynôme caractéristique est irréductible.

2. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation d'un groupe fini G, où V est un $\mathbf{C}$-ev de dimension finie. Montrer qu'il existe un produit scalaire hermitien $\langle , \rangle$ sur V vérifiant

$$\langle \rho_g(x), \rho_g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

pour tout $g \in G$ et tous $x, y \in V$. En déduire une preuve du théorème de Maschke (autre que celle vue en cours).

3. Soit u un endomorphisme diagonalisable de E. Décrire tous les sous-espaces de E stables par u.

4. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Combien de solutions possède l'équation $M^2 = A$ dans $M_3(\mathbf{R})$?

5. (Difficile) On dit qu'un endomorphisme u de E est *semi-simple* si tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable.

a) Montrer que si u est semi-simple, il n'y a pas de facteur multiple dans la décomposition du polynôme minimal π_u en produit de facteurs irréductibles dans $K[X]$.

Dans toute la suite, on désigne par u un endomorphisme dont le polynôme minimal π_u s'écrit $\pi_u = P_1 ... P_r$, avec les P_i irréductibles deux à deux premiers entre eux. On se propose de montrer que u est semi-simple (réciproque de a).

b) Se ramener au cas où $\pi_u = P_1$ est irréductible.

c) On considère alors un sous-espace F stable par u. Soit $x \notin F$. En considérant l'idéal I de $K[X]$ constitué des P tels que $P(u)(x) \in F$, montrer que le sous-espace G constitué des $P(u)(x)$, $P \in K[X]$, est en somme directe avec F.

d) Conclure.

e) Quels sont les endomorphismes semi-simples dont le polynôme caractéristique (ou le polynôme minimal) est scindé ?