105. Groupes des permutations d'un ensemble fini : questions

1. On considère le groupe $G = \mathcal{A}_4$. Soit $D(G)$ son sous-groupe dérivé. Soit V_4 le sous-groupe de G constitué de l'identité et des doubles transpositions.

a) Montrer que $V_4 \lhd G$, puis que $D(G) \subset V_4$ (on observera que G/V_4 est de cardinal 3).

b) Montrer que $D(G) \neq \{1\}$ et que G ne possède pas de sous-groupe distingué de cardinal 2.

c) En déduire que $D(G) = V_4$.

d) Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe fini A, alors $H \lhd A$ (regarder les classes à gauche et à droite suivant G).

e) Soit H un sous-groupe de $G = \mathcal{A}_4$. Montrer que si H est d'indice 2, alors $D(G) \subset H$ (on considérera G/H) et aboutir à une contradiction en utilisant c). Ainsi G (qui est de cardinal 12) n'a pas de sous-groupe de cardinal 6.

f) Montrer au contraire que pour tout $d \in \mathbf{N}^*$ tel que d divise 24, le groupe $\mathcal{S}_4$ possède un sous-groupe de cardinal d.

2. Soit $n \geq 2$ un entier. On se propose de montrer que le sous-groupe dérivé de $\mathcal{S}_n$ est $\mathcal{A}_n$, sans utiliser la simplicité de $\mathcal{A}_n$ pour $n \geq 5$. On rappelle que pour $n \geq 3$, le groupe $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

a) Vérifier directement le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.

b) On suppose $n \geq 4$. Soit c un 3-cycle de $\mathcal{S}_n$. Montrer qu'il existe une transposition τ telle que τc soit conjugué de τ dans $\mathcal{S}_n$.

c) En déduire que c est un commutateur, et conclure.

3. Soit $n \geq 5$. Trouver tous les morphismes de groupes de $\mathcal{S}_n$ dans $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ par un groupe abélien quelconque ? Et si on prend $n = 4$?

4. Soit D_4 le groupe des isométries d'un carré. Montrer qu'on peut le voir comme un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ et donner son cardinal. Est-ce que D_4 est isomorphe à un sous-groupe distingué de S_4 (on pourra utiliser l'exercice 2.) ?

5. Soit p un nombre premier. Quels sont les p-Sylow de $\mathcal{S}_p$?

6. Soit K un corps. Soit $A = K[X_1, ..., X_n]$ la K-algèbre des polynômes en n indéterminées. On note B la sous-algèbre de A constituée des polynômes symétriques.

a) Les K-algèbres A et B sont-elles isomorphes ?

b) Soit $P \in A$; pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note P^σ le polynôme $P(X_{\sigma(1)}, ...X_{\sigma(n)})$. Montrer que le polynôme

$$S := \prod_{\sigma \in \mathcal{S}_n} P^\sigma$$

est symétrique.

c) Soit $L = \operatorname{Frac} A = K(X_1, ..., X_n)$ le corps des fractions rationnelles en n indéterminées. On note M le sous-corps de L constitué des fractions rationnelles F symétriques, c'est-à dire telles que $F^\sigma = F$ pour toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$, où $F^\sigma := F(X_{\sigma(1)}, ...X_{\sigma(n)})$. Montrer que M est l'ensemble des fractions rationnelles qui peuvent s'écrire $F = P/Q$, avec P et Q dans B.

d) En déduire que $M = \operatorname{Frac} B$. Les corps L et M sont-ils isomorphes ?