Exercices : Anneaux

D. Harari

Agrégation

1. Soit A un anneau commutatif. On pose $R = A[X]$.

a) Montrer que si A est intègre, le groupe R^* des inversibles de R est constitué des polynômes constants de A^*.

b) Donner un exemple d'anneau commutatif A contenant un élément $\varepsilon \neq 0$ avec $\varepsilon^2 = 0$.

c) Montrer que le résultat de a) ne vaut plus pour un tel anneau.

2. Soient A et B des anneaux commutatifs. Soit $R = A[X_1, ..., X_n]$. Montrer que pour tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ et pour toute famille $b_1, .., b_n$ d'éléments de B, il existe un unique morphisme d'anneaux $f : R \to B$ vérifiant : $f(a) = \varphi(a)$ pour tout polynôme constant $a \in A$, et $f(X_i) = b_i$ pour tout $i \in \{1, ...n\}$ ("propriété universelle des anneaux de polynômes"). Autrement dit, si on voit B comme une A-algèbre (via φ), il y a un unique morphisme de A-algèbres de R vers B qui envoie X_i sur b_i pour tout i.

3. a) Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier par un morphisme d'anneaux reste un idéal premier.

b) Un idéal I d'un anneau commutatif A est dit *maximal* si $I \neq A$ et tout idéal de A contenant strictement I est égal à A. Montrer que I est maximal si et seulement si l'anneau quotient A/I est un corps.

c) L'image réciproque d'un idéal maximal par un morphisme d'anneaux est-elle toujours un idéal maximal ?

d) En utilisant le lemme de Zorn, montrer que tout idéal I d'un anneau commutatif A, avec $I \neq A$, est contenu dans un idéal maximal. En particulier tout anneau non nul possède au moins un idéal maximal.

e) Montrer que dans un anneau principal, tout idéal premier non nul est maximal.

4. (Suite de l'exercice 3, dont on pourra utiliser les résultats) Un anneau commutatif A est dit *local* s'il est non nul et possède un unique idéal maximal.

a) Montrer que A est local si et seulement si l'ensemble $A - A^*$ de ses éléments non inversibles est un idéal de A.

b) Montrer que dans ce cas $A - A^*$ est l'unique idéal maximal de A.

c) Montrer que l'anneau $\mathbf{C}[[X]]$ des séries formelles à coefficients complexes est un anneau local. Quel est son idéal maximal ?

5. Soit A un anneau commutatif noethérien. Le but de cet exercice est de montrer que l'anneau $A[X]$ est noethérien. Pour tout idéal I de $A[X]$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on note $d_n(I)$ le sous-ensemble de A constitué de 0 et des coefficients dominants des polynômes de degré n de I.

a) Montrer que $d_n(I)$ est un idéal de A. Si I et J sont des idéaux de $A[X]$, montrer que $I \subset J$ implique $d_n(I) \subset d_n(J)$.

b) Montrer que si $n \in \mathbf{N}$, alors $d_n(I) \subset d_{n+1}(I)$.

c) Montrer que si $I \subset J$ et $d_n(I) = d_n(J)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $I = J$.

On considère maintenant une suite croissante $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ d'idéaux de $A[X]$. On note $d_l(I_m)$ un élément maximal de la famille des $d_k(I_n)$ ($k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}^*$), qui existe puisque A est noethérien.

d) Montrer que pour tout $k \leq l$, il existe un entier n_k tel que pour tout $n \geq n_k$, on ait $d_k(I_n) = d_k(I_{n_k})$.

Dans la suite, on pose $N = \max(m, n_0, n_1, ..., n_l)$.

e) Montrer que pour tout $n \geq N$ et tout $k \in \mathbf{N}$, on a $d_k(I_n) = d_k(I_N)$ (on distinguera les cas $k \leq l$ et $k > l$).

f) Conclure que $A[X]$ est noethérien. Que dire de $A[X_1, ..., X_r]$ si $r \in \mathbf{N}^*$?

g) Soit A un anneau noethérien. Soit B un anneau tel qu'il existe $b_1, ..., b_r \in B$ et un morphisme d'anneau $\varphi : A \to B$ vérifiant : le sous-anneau de B engendré par $\varphi(A)$ et les b_i est B (autrement dit, B est engendrée par les b_i comme A-algèbre). Montrer que B est noethérien (cf. exercice 2).