Exercices : Algèbre bilinéaire

D. Harari

Agrégation

1. Soient A et B deux matrices symétriques réelles.

a) Montrer que si A est définie positive, alors AB est diagonalisable en utilisant deux méthodes différentes : lemme de la racine carrée ou théorème de réduction simultanée des formes quadratiques.

b) Montrer que le résultat peut tomber en défaut si A est seulement supposée positive.

c) Donner une version de a) avec des matrices complexes.

d) (difficile) Montrer que si A et B sont symétriques réelles et toutes deux positives, alors AB est diagonalisable.

2. a) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire euclidien ou hermitien. Est-elle encore valable pour une forme quadratique (resp. hermitienne) seulement positive ?

b) Montrer que le cône d'une forme quadratique ou hermitienne positive est égal à son noyau.

3. 4. Soit $J \in M_n(\mathbf{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

a) Quelles sont les valeurs propres de J et leur multiplicité ?

b) Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$, on note $s(A)$ la somme de tous ses coefficients. Déterminer

$$\sup_{A \in O_n(\mathbf{R})} s(A),$$

où $O_n(\mathbf{R})$ est le groupe des matrices orthogonales de $M_n(\mathbf{R})$.

c) Même question pour

$$\sup_{A \in U_n(\mathbf{C})} |s(A)|,$$

où $U_n(\mathbf{C})$ est le groupe des matrices unitaires de $M_n(\mathbf{C})$

4. Soient A et B deux matrices hermitiennes complexes telles que $A^7 = B^7$. Montrer que A et B sont semblables, puis que $A = B$.

5. Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $0 \leq q_1(x) \leq q_2(x)$. On fixe une base de E et on désigne par A et B les matrices respectives de q_1 et q_2 dans cette base. Montrer que $\det A \leq \det B$.

6. Donner un exemple de deux formes hermitiennees non dégénérées φ et ψ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, telles qu'il n'existe pas de base orthogonale à la fois pour φ et ψ.

7. a) Montrer que le groupe unitaire $U_n(\mathbf{C})$ est compact et connexe.

b) Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbf{C})$ est trigonalisable dans une base orthonormée (pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$).

c) Soit F un fermé de $\mathbf{C}$. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{C})$ dont le spectre est inclus dans $\mathbf{C}$ est fermé. Le même résultat vaut-il en remplaçant partout "fermé" par "compact" ?

8. Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses. On désigne par E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique différente de 2.

a) Si q est une forme quadratique non dégénérée sur E, alors la restriction de q à tout sous-espace F de E est non dégénérée.

b) Soit F un sous-espace de E. Si q une forme quadratique sur E et si la restriction de q à F est non dégénérée, alors q est non dégénérée.

c) Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E. On suppose qu'il existe $a \neq 0$ dans E tel que $q(a) = 0$ (autrement dit, q n'est pas anisotrope). Alors l'application $q : E \to K$, $x \mapsto q(x)$ est surjective.

9. On appelle *u-invariant* du corps K l'élément de $\mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$ défini comme le sup des entiers $n \geq 1$ qui ont la propriété suivante : il existe une forme quadratique anisotrope de rang n sur le corps K. Déterminer le u-invariant des corps : $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{F}_q$.

10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique différente de 2. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E. On admet le théorème suivant [1] (*th. de Witt*) : soient F, F' deux sous-

1. On pourra par exemple en trouver une preuve dans le *Cours d'arithmétique* de J-P. Serre.

espaces de E tels que les restrictions de q à F et F' soient équivalentes. Alors il existe un automorphisme métrique (pour q) u de E tel que $u(F) = F'$.

Soient F et G des sous-espaces de E.

a) Montrer que si les restrictions de q à F et G sont équivalentes, il en va de même des restrictions de q à $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$.

b) Montrer que si on a des décompositions en sommes directes orthogonales :

$$E = (\bigoplus_{i=1}^{r} H_i) \oplus F = (\bigoplus_{j=1}^{s} H'_j) \oplus F',$$

où les H_i, H'_j sont des plans hyperboliques et les restrictions de q à F et F' sont anisotropes, alors $r = s$; de plus, les restrictions $q_{|F}$ et $q_{|F'}$ sont isomorphes.