# Exercices : groupes (II); groupes quotients

D. Harari

Agrégation

**1.** a) Soit $f : G \to A$ un morphisme de groupes. Soit $H$ un sous-groupe distingué de $G$ tel que $H \subset \ker f$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\bar{f} : G/H \to A$ tel que $f = p \circ \bar{f}$, où $p : G \to G/H$ est la surjection canonique.

b) On suppose de plus que $A$ est abélien. Montrer que $D(G) \subset \ker f$, et en déduire que $f$ induit un morphisme de groupes $G^{\text{ab}} \to A$.

**2.** On rappelle que dans le groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{n-1}\}$, les éléments $x$ qui vérifient $\langle x \rangle = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont les $\bar{m}$ tels que $m$ et $n$ soient premiers entre eux. Un tel élément sera appelé *générateur* de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Il y a donc $\varphi(n)$ générateurs dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, où $\varphi$ désigne la fonction indicatrice d'Euler.

a) Soit $d$ un diviseur de $n$. Soit $C_d$ le sous-groupe d'ordre $d$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Montrer qu'un élément $x$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est d'ordre $d$ si et seulement si c'est un générateur de $C_d$.

b) En déduire que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

c) Soit $K$ un corps. Soit $G$ un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $K^*$, on note $n$ le cardinal de $G$. Soit $d$ un diviseur de $n$. Montrer que $G$ possède au plus $\varphi(d)$ éléments d'ordre $d$ (on observera que si $x$ est un tel élément, alors tous les éléments $y$ de $\langle x \rangle$ vérifient $y^d = 1$, et que cette équation a au plus $d$ solutions dans $K$).

d) En déduire que $G$ est cyclique. En particulier, si $K$ est un corps fini, alors le groupe multiplicatif $K^*$ est cyclique.

**3.** On dit qu'une suite (finie ou infinie)

$$... \to G_i \to G_{i+1} \to G_{i+2} \to ...$$

est *exacte* (les $G_i$ étant des groupes et les $f_i$ des morphismes) si pour tout $i$, on a $\operatorname{Im} f_i = \ker f_{i+1}$.

a) Montrer que

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

est une suite exacte (dite courte) si et seulement si on a les trois propriétés : $i$ injective, $p$ surjective, $\operatorname{Im} i = \ker p$.

b) Montrer que dans ce cas, on a $G/i(N) \simeq H$ (on notera souvent par abus de langage $N$ pour $i(N)$, qui lui est isomorphe, d'où l'écriture $G/N \simeq H$). On dit alors que $G$ est une *extension* de $H$ par $N$.[1] (quand tous les groupes sont abéliens et notés additivement, on écrira 0 au lieu de 1 dans une suite exacte courte).

c) Soit $K$ un corps. Montrer qu'on a une suite exacte

$$1 \to \mathrm{SL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K) \to K^* \to 1.$$

d) Montrer qu'on a des suites exactes

$$1 \to SO_n(\mathbf{R}) \to O_n(\mathbf{R}) \to \{\pm 1\} \to 1$$

et

$$1 \to SU_n(\mathbf{C}) \to U_n(\mathbf{C}) \to S^1 \to 1,$$

où $S^1$ désigne le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

e) Soit $G$ un groupe de centre $Z$. Soit $(\operatorname{Int} G, \circ)$ le groupe des automorphismes intérieurs de $G$. Montrer qu'on a une suite exacte

$$1 \to Z \to G \to \mathrm{Int} G \to 1.$$

**4.** On note $H$ l'ensemble des matrices de la forme

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

avec $(a, b) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$. On pose $H^* = H - \{0\}$.

a) Montrer que $H^*$ est un sous-groupe non commutatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.

b) On note 1 la matrice identité, et on pose $I := M_{i,0}$, $J = M_{0,1}$, $K = M_{0,i}$. Soit $H_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$. Montrer que $H_8$ est un sous-groupe non commutatif de cardinal 8 de $H^*$ (on observera que $IJ = K = -IJ$, avec des relations analogues par permutations circulaires de $I, J, K$).

c) Montrer que le centre et le sous-groupe dérivé de $H_8$ sont tous deux égaux à $\{\pm 1\}$.

1. Certains auteurs, par exemple D. Perrin, disent plutôt extension de $N$ par $H$.

d) Montrer que l'abélianisé de $H_8$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

**5.** Faire la liste, à isomorphisme près, des groupes de cardinal $\leq 7$.

**6.** Soit $G = \mathrm{GL_n}(\mathbf{C})$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Quel est l'ordre de $A$ dans $G$ ?

b) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $gAg^{-1} = A^2$.

c) Soit $H$ le sous-groupe de $G$ engendré par $A$. Montrer que $gHg^{-1}$ est un sous-groupe strict de $H$, et que l'ensemble des $x \in G$ tels que $xHx^{-1} \subset H$ n'est pas un sous-groupe de $G$.

d) Soit maintenant $G$ un groupe quelconque, $H$ un sous-groupe de $G$, et $N_G(H)$ l'ensemble des $x \in G$ tels que $xHx^{-1} = H$. Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de $G$ (appelé *normalisateur de $H$ dans $G$*), et que si $H$ est fini, il coïncide avec l'ensemble des $x \in G$ tels que $xHx^{-1} \subset H$ (mais pas en général, cf. c).