Entraînement écrit (Topologie sur les espaces de matrices) : Durée 4h

D. Harari

Agrégation

1. Parmi les sous-espaces suivants de $M_n(\mathbf{C})$, dire lesquels sont fermés dans $M_n(\mathbf{C})$, lesquels sont ouverts dans $M_n(\mathbf{C})$, et lesquels sont compacts, en justifiant les réponses en détails :

a) L'ensemble $M_n(\mathbf{R})$ des matrices réelles.

b) L'ensemble $SL_n(\mathbf{C})$ des matrices complexes de déterminant 1.

c) L'ensemble $O_n(\mathbf{R})$ des matrices orthogonales réelles.

d) L'ensemble des matrices complexes normales (i.e. commutant avec leur adjointe).

e) L'ensemble des matrices complexes diagonalisables.

f) L'ensemble des matrices complexes diagonalisables dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes.

g) L'ensemble des matrices hermitiennes complexes définies positives.

2. a) Montrer que le groupe unitaire $U_n(\mathbf{C})$ (constitué des matrices A de $M_n(\mathbf{C})$ vérifiant $A^*A = I_n$) est compact.

b) Montrer que $U_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs (on pourra utiliser la réduction des matrices normales pour montrer que toute matrice de $U_n(\mathbf{C})$ peut être reliée à I_n par un chemin continu dans $U_n(\mathbf{C})$).

c) Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbf{C})$ est trigonalisable dans une base orthonormée (pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$).

d) Soit F un fermé de $\mathbf{C}$. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{C})$ dont le spectre est inclus dans F est fermé. Le même résultat vaut-il en remplaçant partout "fermé" par "compact" ?

e) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{R})$ qui sont trigonalisables dans $M_n(\mathbf{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbf{R})$.

3. On rappelle que pour tout corps K, le groupe $SL_n(K)$ est engendré par les transvections, c'est-à dire par les matrices qui sont semblables à la matrice

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & ... & 1 & 1 \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(La matrice $(T - I_n)$ a pour seul coefficient non nul celui sur l'avant-dernière ligne et la dernière colonne, qui vaut 1).

a) Soit $S \in M_n(\mathbf{C})$ une transvection. Montrer qu'il existe un chemin continu dans $SL_n(\mathbf{C})$ qui relie S à l'identité.

b) Montrer que $SL_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

c) $SL_n(\mathbf{R})$ est-il connexe ?

d) Déterminer les composantes connexes de $GL_n(\mathbf{C})$ et celles de $GL_n(\mathbf{R})$.

4. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $E = \mathbf{R}^n$. On note $\mathrm{SO}(q)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ constitué des isométries (pour la forme q) de déterminant 1. On le munit de la topologie induite par celle de $M_n(\mathbf{R})$.

a) On suppose q définie. Montrer que $\mathrm{SO}(q)$ est compact et connexe.

b) Que se passe-t-il si q n'est plus supposée définie ?