Entraînement écrit (Groupes, II) : Durée 4h

D. Harari

Agrégation

1. Soit G un groupe fini. On note $\widehat{G}$ le groupe des morphismes de G dans $\mathbf{C}^*$ (la loi étant la multiplication des fonctions). Autrement dit les éléments de $\widehat{G}$ sont les représentations de G de degré 1.

a) Montrer que si G est d'ordre n, alors tout élément $\chi : G \to \mathbf{C}^*$ de $\widehat{G}$ est à valeurs dans le groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité.

b) Montrer que tout élément $\chi : G \to \mathbf{C}^*$ de $\widehat{G}$ induit l'identité sur le sous-groupe dérivé $D(G)$ de G. En déduire que $\widehat{G}$ est isomorphe à $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$.

c) Montrer que si G est cyclique d'ordre n, il en va de même de $\widehat{G}$.

d) Décrire $\widehat{G}$ pour $G = \mathcal{S}_n$ avec $n \geq 3$.

2. Soit G un groupe fini. Montrer que G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

3. Soient p un nombre premier et G un p-groupe fini. Soit $(A, +)$ un groupe abélien avec $A \neq \{0\}$. On suppose donnée une action de G sur A par automorphismes, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, la bijection $x \mapsto g.x$ de A dans A est un automorphisme du groupe abélien A. On suppose de plus que A est *de torsion p-primaire*, i.e. pour tout $x \in A$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p^m x = 0$.

a) Montrer que si A est fini, son cardinal est une puissance de p.

b) On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $x \neq 0$ dans A tel que pour tout $g \in G$, on ait $g.x = x$.

c) On ne suppose plus A fini. Soit $a \neq 0$ dans A. Montrer que le sous-groupe B de A engendré par $\{g.a, g \in G\}$ est fini.

d) En déduire que le résultat de b) vaut encore sans l'hypothèse A fini.

4. Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit nombre premier divisant $\#G$. Soit H un sous-groupe de G d'indice p. On se propose de montrer que H est distingué dans G.

a) Montrer que H opère sur l'ensemble des classes à gauche G/H par $h.(aH) := (ha)H$ pour tout $h \in H$ et tout $a \in G$. Quel est le stabilisateur de aH ? Quelle est l'orbite de la classe H ?

b) Montrer que si H n'était pas distingué dans G, alors au moins l'une des orbites aurait un cardinal $\geq p$.

c) Conclure.

5. Soit $K = \mathbf{F}_q$ un corps fini de cardinal q. On considère le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(K)$ et son sous-groupe $\mathrm{SL}_n(K)$.

a) Montrer que le centre de $\mathrm{GL}_n(K)$ (resp. de $\mathrm{SL}_n(K)$) est constitué des matrices scalaires de ce groupe.

b) On note $\mathrm{PGL}_n(K)$ (resp. $\mathrm{PSL}_n(K)$) le quotient de $\mathrm{GL}_n(K)$ (resp. $\mathrm{SL}_n(K)$) par son centre. Calculer les cardinaux de $\mathrm{SL}_n(K)$, $\mathrm{PGL}_n(K)$ et $\mathrm{PSL}_n(K)$.

6. Soit G un groupe fini tel que le quotient de G par son centre soit abélien. Le groupe G est-il toujours abélien ?

7. Quels sont les groupes finis G tels que tout élément x de G vérifie $x^2 = 1$?

8. Soit G un groupe admettant une partie génératrice finie. Montrer que G est fini ou dénombrable. Est-il vrai réciproquement que tout groupe dénombrable admet une partie génératrice finie ?