Entraînement écrit (Groupes, I) : Durée 4h

D. Harari

Agrégation

1. Soit G le groupe abélien $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, muni de la loi $+$.

a) Montrer que si $f : G \to G$ est un morphisme de groupes, alors f est aussi un morphisme de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espaces vectoriels.

b) En déduire que le groupe $S := \mathtt{Aut}\, G$ des automorphismes du groupe G est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

c) Montrer que S est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_3$.

2. Montrer que le groupe additif $\mathbf{Q}$ n'est pas engendré par une partie finie.

3. a) Soit $G = \mathcal{S}_4$. On fixe une double transposition τ de G. Soit H le sous-groupe de G constitué de l'identité et des doubles transpositions. Soit K le sous-groupe $\{\mathrm{id}, \tau\}$ de G. Montrer que $K \lhd H$, $H \lhd G$, mais K n'est pas distingué dans G.

b) Soient H un sous-groupe de G et K un sous-groupe caractéristique de H. Montrer que si H est distingué (resp. caractéristique) dans G, alors K est distingué (resp. caractéristique) dans G.

4. On rappelle la formule, valable pour tout entier $n > 0$:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

a) Soit K un corps fini. Soit G un sous-groupe du groupe multiplicatif K^*, on note n l'ordre de G. Soit d un diviseur de n. Montrer que G possède au plus $\varphi(d)$ éléments d'ordre d (on observera que si x est un tel élément, alors tous les éléments de $\langle x \rangle$ vérifient $x^d = 1$).

b) En déduire que G est cyclique.

5. a) Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué de G, on note $p : G \to G/H$ la surjection canonique. Soit B un sous-groupe de G/H, on pose $A = p^{-1}(B)$. Montrer que l'indice $[G : A]$ de A dans G est égal à l'indice $[G/H : B]$ de B dans G/H.

b) Soit G un groupe abélien de cardinal p^α avec $\alpha \geq 1$. Montrer que G possède un sous-groupe d'indice p (on commencera par traiter le cas où G est cyclique ; si G n'est pas cyclique, on raisonnera par récurrence sur α).

c) Soit G un groupe non-abélien de cardinal p^α avec $\alpha \geq 1$. Montrer que G possède un sous-groupe distingué d'indice p (on procèdera par récurrence sur α et on utilisera le centre de G).

d) Soit G un groupe fini de cardinal p^α avec $\alpha \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout $i \in \{0, ..., \alpha\}$, G possède un sous-groupe G_i de cardinal p^i.

e) Soit G un groupe fini d'ordre $p^\alpha.m$ avec $\alpha \in \mathbf{N}$ et m premier avec p. Soit $i \in \{0, ..., \alpha\}$. G possède-t-il toujours un sous-groupe de cardinal p^i.

6. On considère le groupe $G = \mathcal{A}_4$. Soit $D(G)$ son sous-groupe dérivé. Soit V_4 le sous-groupe de G constitué de l'identité et des doubles transpositions.

a) Montrer que $V_4 \lhd G$, puis que $D(G) \subset V_4$ (on observera que G/V_4 est de cardinal 3).

b) Montrer que $D(G) \neq \{1\}$ et que G ne possède pas de sous-groupe distingué de cardinal 2.

c) En déduire que $D(G) = V_4$.

d) Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe A, alors $H \lhd A$.

e) Montrer que $\mathcal{A}_4$ n'a pas de sous-groupe de cardinal 6.