Corrigé de l'entraînement écrit "Topologie sur les espaces de matrices"

D. Harari

Agrégation

1. a) Une matrice A de $M_n(\mathbf{C})$ est dans $M_n(\mathbf{R})$ si et seulement si elle vérifie la condition $\overline{A} = A$. Ainsi, $M_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbf{C})$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Comme $M_n(\mathbf{C})$ est connexe (c'est un espace vectoriel normé, donc en particulier convexe), l'ensemble $M_n(\mathbf{R})$ (qui est non vide et distinct de $M_n(\mathbf{C})$) ne peut pas être ouvert dans $M_n(\mathbf{C})$. Enfin $M_n(\mathbf{R})$ n'est pas compact, car clairement non borné.

b) L'ensemble $SL_n(\mathbf{C})$ est fermé dans $M_n(\mathbf{C})$ car image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbf{C}$ par l'application continue déterminant. Toujours par la connexité de $M_n(\mathbf{C})$, on obtient que $SL_n(\mathbf{C})$ ne peut pas être ouvert dans $M_n(\mathbf{C})$. Enfin $SL_n(\mathbf{C})$ n'est pas compact dès que $n \geq 2$, puisqu'il contient les matrices $\mathrm{Diag}(\lambda, \lambda^{-1}, 1, ..., 1)$ avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$, dont l'ensemble n'est pas borné.

c) Le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$ est fermé dans l'espace vectoriel normé de dimension finie $M_n(\mathbf{R})$ (donc aussi dans $M_n(\mathbf{C})$ d'après a) comme image réciproque de I_n par l'application continue $A \mapsto^t A.A$. Il est également borné car la condition ${}^tA.A = I_n$ impose que tous les coefficient de A aient pour valeur absolue au plus 1. Ainsi $O_n(\mathbf{R})$ est compact. Il n'est pas ouvert dans $M_n(\mathbf{C})$ vu la connexité de $M_n(\mathbf{C})$.

d) La matrice A est normale si et seulement si $A^*A = AA^*$, ce qui fait que l'ensemble E des matrices complexes normales est fermé dans $M_n(\mathbf{C})$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Comme déjà vu, E ne peut pas être aussi ouvert dans $M_n(\mathbf{C})$. Enfin, E n'est pas compact car non borné (il contient par exemple λI_n pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$).

e) Soit D cet ensemble. Il n'est pas compact car il est non borné (car contenant tous les λI_n, $\lambda \in \mathbf{C}$). Il n'est pas fermé car la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

est dans D pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, mais la suite de matrices correspondante tend vers une matrice de Jordan, qui n'est pas diagonalisable. Enfin, D n'est pas non plus ouvert dans $M_n(\mathbf{C})$ car son complémentaire contient les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $k \in \mathbf{N}^*$, dont la limite est dans D.

f) Soit D' cet ensemble. Il n'est pas compact (clairement pas borné, en considérant simplement des matrices diagonales). Il est ouvert dans $M_n(\mathbf{C})$: en effet une matrice A est dans D' si et seulement si le résultant de χ_A et χ'_A (où χ_A est le polynôme caractéristique de A) est non nul, donc D' est l'image réciproque de $\mathbf{C}^*$ par une application continue (polynomiale en les coefficients de A). Enfin, D' n'est pas fermé par connexité de $M_n(\mathbf{C})$.

g) Soit F cet ensemble. Il n'est pas fermé dans $M_n(\mathbf{C})$ car $(1/k)I_n$ est dans F pour tout $k > 0$, mais pas la limite (matrice nulle) quand k tend vers l'infini. Il n'est donc pas compact, et il n'est pas non plus ouvert dans $M_n(\mathbf{C})$ car la suite de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est à valeurs dans le complémentaire de F (ces matrices ne sont pas hermitiennes), alors que leur limite I_n est bien dans F. Attention à ne pas confondre avec le fait que F est bien un ouvert de l'ensemble des matrices hermitiennes.

2. a) C'est exactement le même argument que pour le c) de l'exercice 1, qui permet de voir qu'$U_n(\mathbf{C})$ est un fermé borné de l'e.v.n. de dimension finie $M_n(\mathbf{C})$.

b) Soit $A \in U_n(\mathbf{C})$. La réduction des matrices normales dans le cas particulier d'une matrice unitaire nous dit qu'il existe $P \in U_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale de la forme

$$D = \mathrm{Diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}),$$

avec les θ_i réels. Posons alors

$$D_t = \mathrm{Diag}(e^{it\theta_1}, ..., e^{it\theta_n})$$

pour $t \in [0, 1]$ et $A(t) = PD_tP^{-1}$. Alors $t \mapsto A(t)$ est une application continue, à valeurs dans $U_n(\mathbf{C})$ (puisque diagonalisable en b.o.n. avec des valeurs propres de module 1), vérifiant $A(0) = I$ et $A(1) = A$. On a ainsi relié toute matrice de $U_n(\mathbf{C})$ à I par un chemin continu à valeurs dans $U_n(\mathbf{C})$, ce qui permet de relier (en passant par I) deux matrices quelconques de $U_n(\mathbf{C})$ par un chemin continu à valeurs dans $U_n(\mathbf{C})$. Ainsi $U_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

c) Tout endomorphisme u de $\mathbf{C}^n$ est trigonalisable dans une base $\mathcal{B}$. En orthonormalisant $\mathcal{B}$ par le procédé de Gram-Schmidt, on obtient une b.o.n. $\mathcal{B}'$, et la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ reste triangulaire supérieure car le procédé de Gram-Schmidt donne que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure. D'où le résultat.

d) Soit (A_k) une suite de matrices dont le spectre est inclus dans F, convergeant vers une matrice A. D'après c), on peut écrire $A_k = P_k T_k P_k^{-1}$ avec P_k unitaire et T_k triangulaire supérieure. D'après a), on peut supposer quitte à extraire que P_k converge vers une matrice unitaire (donc inversible) P. Il en resulte que (T_k) converge vers une matrice triangulaire $T = P^{-1}AP$. Comme le spectre de chaque T_k est inclus dans F, ses coefficients diagonaux sont dans F, et cela reste vrai pour sa limite T vu que F est fermé. Ainsi, le spectre de A (qui est le même que celui de T) est bien dans F.

La même propriété ne vaut pas avec compact, par exemple l'ensemble des matrices de spectre réduit à $\{0\}$ n'est pas borné, il contient la matrice αJ pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, où J est la matrice de Jordan.

e) D'après d), l'ensemble E des matrices complexes dont le spectre est réel est un fermé de $M_n(\mathbf{C})$, puisque $\mathbf{R}$ est fermé dans $\mathbf{C}$. L'intersection de E avec $M_n(\mathbf{R})$ est donc fermé dans $M_n(\mathbf{R})$, ce qui prouve le résultat.

3. a) On écrit $S = PTP^{-1}$ avec P inversible. Posons

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient alors un chemin continu à valeurs dans $SL_n(\mathbf{C})$, avec $M(0) = I$ et $M(1) = T$. Il suffit alors de prendre le chemin N défini par $N(t) = PM(t)P^{-1}$, il est bien à valeurs dans $SL_n(\mathbf{C})$, avec $N(0) = I$ et $N(1) = S$.

b) Il suffit de montre que tout élément A de $SL_n(\mathbf{C})$ peut être relié à I par un chemin continu. On peut écrire

$$A = S_1 \dots S_r,$$

où les S_i sont des transvections (noter que l'inverse d'une transvection est encore une transvection). D'après a), on a pour chaque i un chemin continu

$t \mapsto N_i(t)$, à valeurs dans $SL_n(\mathbf{C})$, vérifiant $N_i(0) = I$ et $N_i(1) = S_i$. Il suffit alors de considérer le chemin

$$t \mapsto N_1(t)...N_i(t).$$

.

c) Oui : la preuve est exactement la même qu'en b), à ceci près que dans a) on choisit une matrice P dans $GL_n(\mathbf{R})$ (et pas seulement dans $GL_n(\mathbf{C})$).

d) L'application $u : \mathbf{C}^* \times SL_n(\mathbf{C}) \to GL_n(\mathbf{C})$ qui envoie (λ, A) sur λA est continue. Elle est surjective car si $B \in GL_n(\mathbf{C})$, il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $\lambda^n = \det B$, et un antécédent de B par u est alors $(\lambda, B/\lambda)$. Ainsi $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe. Le même argument montre que l'ensemble $GL_n^+(\mathbf{R})$ des matrices réelles de déterminant > 0 est connexe, et que l'autre composante connexe de $GL_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble $GL_n^-(\mathbf{R})$ des matrices réelles de déterminant < 0 (ce dernier est homéomorphe à $GL_n^+(\mathbf{R})$ via $M \mapsto PM$, où on a fixé une matrice P de déterminant > 0).

4. Noter que si S est la matrice de q dans une base de $\mathbf{R}^n$, le groupe $O(q)$ des isomt́ries pour q est isomorphe à celui des matrices O vérifiant ${}^tOSO = S$.

a) Ce cas correspond à $S = I$ ou $S = -I$, et le groupe $SO(q)$ est donc isomorphe à $SO_n(\mathbf{R})$. Il est classique que ce groupe est connexe (pour relier une matrice de $SO_n(\mathbf{R})$ à I par un chemin continu, on utilise la réduction des isométries de $\mathbf{R}^n$ pour le produit scalaire canonique) et compact (comme fermé dans $O_n(\mathbf{R})$, lequel est fermé borné dans $M_n(\mathbf{R})$).

b) Prenons $n = 2$ et

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul donne que $O(q)$ correspond aux matrices

$$O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vérifiant : soit $a = d = 0$ et $bc = 1$, soit $b = c = 0$ et $ad = 1$. Ainsi, $O(q)$ correspond aux matrices de la forme

$$O = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix}$$

avec $b \in \mathbf{R}^*$ ou de la forme

$$O = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbf{R}^*$. Les matrices de $SO(q)$ sont celles de déterminant 1, c'est-à-dire de la deuxième forme. Il est alors clair que ce $SO(q)$ n'est ni compact (a n'est pas borné) ni connexe (l'image de $SO(q)$ par l'application qui associe à une matrice son terme en haut à gauche a pour image $\mathbf{R}^*$). Pour une étude plus détaillée de $O(q)$ suivant la signature de q, on pourra consulter "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques" de Mneimé et Testard.