181. Barycentres, convexité : questions

1. Soient A, B, C, D quatre points de l'espace euclidien $V = \mathbf{R}^3$ de dimension 3, se trouvant sur une sphère S de rayon 1. On suppose que

$$AB.AC.AD.BC.BD.CD = \frac{2^9}{3^3}.$$

Pour tout $M \in V$, on pose

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2.$$

a) Trouver une minoration de

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2,$$

et la traduire avec la fonction f.

b) Montrer que si on appelle O le centre de la sphère S, alors O est l'équibarycentre de A, B, C, D.

c) Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier.

2. On rappelle qu'un point x d'un convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel est dit *extrémal* si l'égalité $x = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ avec $\lambda \in]0,1[$ et $y_1, y_2 \in C$ implique $x = y_1 = y_2$.

a) Trouver les points extremaux de la boule unité de $\mathbf{R}^2$ pour la norme euclidienne et pour la norme sup.

b) Soit E un e.v.n. sur $\mathbf{R}$. Soit C un convexe compact non vide de E. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes convexes non vides K de C vérifiant :

(*) pour tout $x \in K$, si $x = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ avec $\lambda \in]0,1[$ et $y_1, y_2 \in C$, alors $y_1, y_2 \in K$.

Montrer que $\mathcal{K}$ admet un élément minimal pour l'inclusion (utiliser le lemme de Zorn).

c) Montrer qu'une partie non vide S de E est réduite à un point si et seulement si pour toute forme linéaire continue f sur E, $f(S)$ est réduit à un point.

d) En utilisant b) et c), montrer que C admet un point extremal.

3. Soit E un e.v.n. réel. Soit K une partie de E vérifiant : si $x, y \in K$, alors $\frac{x+y}{2} \in K$.

a) Montrer que si K est fermé, alors K est convexe.

b) Le résultat de a) vaut-il encore si K n'est pas fermé ?

c) Traduire le a) en terme de fonctions convexes.

4. Soient deux compacts convexes d'intérieur non vides de $\mathbf{R}^n$. Sont-ils toujours homéomorphes ? On pourra, pour un convexe compact C contenant 0 comme point intérieur, utiliser l'application p définie par

$$p(x) = \inf \{t \in \mathbf{R}_+^*, x/t \in A\}.$$