

## 151. Dimension d'un espace vectoriel : questions

1. Rappeler rapidement comment on montre que si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $K$ , alors tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est également un espace vectoriel de dimension finie avec  $\dim F \leq \dim E$ .

2. Soit  $k$  un entier  $\geq 1$ . Soient  $a_0, \dots, a_{k-1}$  des réels. L'espace des suites réelles vérifiant une relation de récurrence linéaire du type

$$u_{n+k} = a_0 u_n + \dots + a_{k-1} u_{n+k-1}$$

est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Montrer qu'il est de dimension  $k$ .

3. On note  $\overline{\mathbf{Q}}$  l'ensemble des nombres complexes qui sont algébriques sur  $\mathbf{Q}$ . On a vu que c'était un sous-corps de  $\mathbf{C}$ .

a) Montrer que  $\overline{\mathbf{Q}}$  est dénombrable.

b) Montrer que  $\overline{\mathbf{Q}}$  est algébriquement clos; on observera que si  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$  est un polynôme unitaire à coefficients dans  $\overline{\mathbf{Q}}$ , tous les coefficients  $a_i$  vérifient que le corps  $\mathbf{Q}(a_i)$  est un  $\mathbf{Q}$ -ev de dimension finie.

c) Montrer que  $\overline{\mathbf{Q}}$  est le plus petit corps algébriquement clos (inclus dans  $\mathbf{C}$ ) qui contient  $\mathbf{Q}$  ("clôture algébrique de  $\mathbf{Q}$ "). Étendre cette construction à un sous-corps  $K$  quelconque d'un corps algébriquement clos  $L$ .

d)  $\overline{\mathbf{Q}}$  est-il un  $\mathbf{Q}$ -ev de dimension finie ?

4. Soit  $I$  un ensemble (pas forcément fini). Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$ , admettant une base  $(e_i)_{i \in I}$ . A-t-on  $E$  isomorphe à  $K^I$  ? Et que dire du dual  $E^*$  ?

5. Soit  $(A, +)$  un groupe abélien. Soit  $p$  un nombre premier. On suppose que pour tout  $x \in A$ , on a  $px = 0$ . Donner la structure de  $A$  si  $A$  est fini. Que peut-on dire si  $A$  est infini ?

6. Soit  $E$  l'ensemble des matrices complexes  $A \in M_2(\mathbf{C})$  qui vérifient :  $A^* = A$  et  $\text{Tr } A = 0$ , où  $A^*$  désigne la matrice adjointe de  $A$ . Est-ce que  $E$  est un espace vectoriel ? Si oui, donner sa dimension.

7. (À réserver à ceux qui ont déjà entendu parler de modules). Bien qu'à peu près tous les résultats de la théorie de la dimension tombent en défaut si on remplace le corps  $K$  par un anneau commutatif  $A$  (la notion analogue à celle de  $K$ -espace vectoriel s'appelle alors  $A$ -module), il subsiste quelques énoncés :

a) Soit  $f : A^r \rightarrow A^s$  une application linéaire surjective entre les  $A$ -modules  $A^r$  et  $A^s$ , où  $A$  est un anneau commutatif non nul. Alors  $r \geq s$ . Pour cela, on montrera d'abord que si  $I$  est un idéal de  $A$ ,  $f$  induit une application linéaire surjective entre les  $A/I$ -modules  $(A/I)^r$  et  $(A/I)^s$ , puis on choisira bien  $I$ .

b) En déduire que si  $M$  est un module sur un anneau commutatif  $A \neq 0$  qui admet une base finie, toutes les bases ont le même cardinal (on dit alors que  $M$  est un module *libre* de rang ce cardinal). Donner un exemple avec  $A = \mathbf{Z}$  de module qui n'admet pas de base, et aussi de sous-module strict d'un module libre de rang 1 qui est encore libre de rang 1 (remarque : quand  $A$  est principal, il reste vrai qu'un sous-module d'un module libre de rang  $r$  est libre de rang  $\leq r$ ).