144. Racines d'un polynôme, fonction symétriques élémentaires : questions

1. Soit K un corps. On note $K(X_1, ..., X_n)$ le *corps des fractions rationnelles en n indéterminées*, qui est par définition le corps des fractions de l'anneau intègre $K[X_1, ..., X_n]$. On dit que $F(X_1, ..., X_n) \in K(X_1, ..., X_n)$ est *symétrique* si pour toute permutation σ de $\{1, ..., n\}$, on a $F(X_1, ..., X_n) = F(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)})$.

a) Montrer que l'ensemble des fractions rationnelles symétriques est un sous-corps de $K(X_1, ..., X_n)$.

b) Comparer ce sous-corps au corps des fractions de l'anneau (intègre) des polynômes symétriques.

2. Soit X un espace topologique. Soit $f : \mathbf{C}^n \to X$ une application continue. On suppose que f est *symétrique*, c'est-̀-dire que pour toute permutation σ de $\{1, ..., n\}$, on a $f(x_1, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$ pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{C}^n$. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{C}^n$, on pose

$$s(x) = (s_1(x_1, ..., x_n), ..., s_n(x_1, ..., x_n)),$$

où s_p est la p-ième fonction symétrique élémentaire.

a) Montrer que $s : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ est surjective.

b) Montrer qu'il existe une unique application $g : \mathbf{C}^n \to X$ telle que $f = g \circ s$.

c) Montrer que l'image réciproque d'une partie bornée de $\mathbf{C}^n$ par s est bornée.

d) En déduire que l'image directe d'une partie fermée de $\mathbf{C}^n$ par s est fermée, puis que g est continue.

e) Soit F_n l'ensemble des polynômes unitaires complexes de degré n. Soit S l'ensemble des parties compactes de $\mathbf{C}$ muni de la distance de Hausdorff :

$$h(A, B) := \max(\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)).$$

Montrer que l'application Z de F_n dans S qui associe à tout polynôme l'ensemble des ses racines est continue.

f) On fait opérer naturellement le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ sur $\mathbf{C}^n$ par $\sigma(x_1, ..., x_n) := (\sigma(x_1), ..., \sigma(x_n))$ pour tous $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{C}^n$. Soit E l'ensemble des orbites, muni de la topologie quotient de celle de $\mathbf{C}^n$ pour la relation d'équivalence "être dans la même orbite". Soit u l'application de F_n dans E qui associe à tout polynôme l'élément de E correspondant à la famille de ses racines (chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité). Montrer que u est continue.

g) Pour $n \geq 2$, montrer qu'il n'y a pas d'application continue φ de F_n dans $\mathbf{C}$ telle que pour tout $P \in F_n$, $\varphi(P)$ soit une racine de P.

3. a) Exhiber un polynôme irréductible unitaire de degré 3 à coefficients dans $\mathbf{F}_2$.

b) En déduire la table de multiplication de $\mathbf{F}_8$.

4 Soient $F \in \mathbf{Q}[X]$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Soit ζ_1, ζ_2 deux racines primitives n-ièmes de l'unité. On suppose que $F(\zeta_1) = 0$. A-t-on forcément $F(\zeta_2) = 0$?