

105. Groupes des permutations d'un ensemble fini : questions

1. On considère le groupe $G = \mathcal{A}_4$. Soit $D(G)$ son sous-groupe dérivé. Soit V_4 le sous-groupe de G constitué de l'identité et des doubles transpositions.

a) Montrer que $V_4 \triangleleft G$, puis que $D(G) \subset V_4$ (on observera que G/V_4 est de cardinal 3).

b) Montrer que $D(G) \neq \{1\}$ et que G ne possède pas de sous-groupe distingué de cardinal 2.

c) En déduire que $D(G) = V_4$.

d) Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe A , alors $H \triangleleft A$ (regarder les classes à gauche et à droite suivant G).

e) Soit H un sous-groupe de $G = \mathcal{A}_4$. Montrer que si H est d'indice 2, alors $D(G) \subset H$ (on considérera G/H) et aboutir à une contradiction en utilisant c). Ainsi G (qui est de cardinal 12) n'a pas de sous-groupe de cardinal 6.

f) Montrer au contraire que pour tout $d \in \mathbf{N}^*$ tel que d divise 24, le groupe \mathcal{S}_4 possède un sous-groupe de cardinal d .

2. Soit $n \geq 2$ un entier. On se propose de montrer que le sous-groupe dérivé de \mathcal{S}_n est \mathcal{A}_n , sans utiliser la simplicité de \mathcal{A}_n pour $n \geq 5$. On rappelle que pour $n \geq 3$, le groupe \mathcal{A}_n est engendré par les 3-cycles.

a) Vérifier directement le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.

b) On suppose $n \geq 4$. Soit c un 3-cycle de \mathcal{S}_n . Montrer qu'il existe une transposition τ telle que τc soit conjugué de τ dans \mathcal{S}_n .

c) En déduire que c est un commutateur, et conclure.

3. Soit $n \geq 5$. Trouver tous les morphismes de groupes de \mathcal{S}_n dans $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ par un groupe abélien quelconque ? Et si on prend $n = 4$?

4. Soit D_4 le groupe des isométries d'un carré. Montrer qu'on peut le voir comme un sous-groupe de \mathcal{S}_4 et donner son cardinal. Est-ce que D_4 est isomorphe à un sous-groupe distingué de S_4 (on pourra utiliser l'exercice 2.) ?

5. Soit p un nombre premier. Quels sont les p -Sylow de \mathcal{S}_p ?

6. Soit K un corps. Soit $A = K[X_1, \dots, X_n]$ la K -algèbre des polynômes en n indéterminées. On note B la sous-algèbre de A constituée des polynômes symétriques. Les K -algèbres A et B sont-elles isomorphes ?