

## 101. Groupes opérant sur un ensemble : questions

1. Soit  $G$  un groupe fini. Soit  $p$  le plus petit nombre premier divisant  $\#G$ . Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$  d'indice  $p$ . Montrer que  $H$  est distingué dans  $G$  (faire opérer  $H$  sur l'ensemble des classes à gauche  $G/H$ ).

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps  $K$ .

a) On fait opérer le groupe linéaire  $G := \text{GL}(E)$  sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$  par :  $g.F := g(F)$  pour tout  $g \in G$  et tout sous-espace  $F$  de  $E$ . Quelles sont les orbites pour cette action ?

b) On prend  $K = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$  et  $n = 5$ . Combien  $E$  possède-t-il de sous-espaces vectoriels de dimension 3 ?

3. a) Combien y a-t-il d'opérations du groupe  $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$  sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  ?

b) Soient  $G$  et  $X$  deux groupes. On dit que  $G$  opère par automorphismes sur  $X$  si on s'est donnée une opération  $(g, x) \mapsto g.x$  de  $G$  sur  $X$  telle que pour tout  $g \in G$ , l'application  $x \mapsto g.x$  soit un automorphisme de  $X$ . L'opération de  $G$  sur lui-même par translation est-elle une opération par automorphismes ? Même question pour l'opération par conjugaison.

c) On prend  $G = (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, +)$  et  $X = (\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}, +)$ . Combien y a-t-il d'actions de  $G$  sur  $X$  par automorphismes ? Même question en remplaçant  $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$  par le groupe symétrique  $\mathcal{S}_3$ .

4. Soit  $E$  un espace euclidien. On fait opérer son groupe orthogonal  $O(E)$  sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

a) Quelles sont les orbites pour cette action ?

b) Donner un énoncé analogue pour les espaces hermitiens.

c) Y a-t-il un énoncé analogue pour le groupe orthogonal  $O(q)$  d'un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique non dégénérée  $q$  ?