Exercices : Anneaux, Polynômes (II)

D. Harari

Agrégation

1. Soit A un anneau commutatif intègre. On dit que A est *euclidien* s'il existe une application $v : A - \{0\} \to \mathbf{N}$ ("stathme euclidien") tel que si a, b sont non nuls dans A, alors il existe q, r dans A avec $a = bq + r$ et r vérifiant : $r = 0$ ou $v(r) < v(b)$.

a) Montrer que les anneaux $\mathbf{Z}$ et $K[X]$, quand K est un corps, sont euclidiens (on précisera quel est le stathme v dans chaque cas).

b) Montrer que tout anneau euclidien est principal. La réciproque est fausse mais les contre-exemples classiques ne sont pas évidents ($\mathbf{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$, $\mathbf{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1)$; voir par exemple le livre de D. Perrin).

2. Soit A un anneau commutatif. On dit que A est *noethérien* si pout tout idéal I de A, il existe un nombre fini $x_1, ..., x_n$ d'éléments de I tels que $I = \{\sum_{i=1}^n a_i b_i, a_i \in A\}$ (autrement dit : tout idéal de A est engendré par un nombre fini d'éléments, c'est le cas par exemple si A est un anneau principal).

a) Montrer l'équivalence des propriétés (pour $i) \Rightarrow ii)$, on observera que si (I_n) est une suite croissante d'idéaux, alors leur réunion est encore un idéal) :

i) A est noethérien.

ii) Toute suite croissante $I_1 \subset I_2 \subset ...I_n \subset ...$ d'idéaux est stationnaire (autrement dit : il existe un indice k tel que $I_n = I_k$ pour tout $n \geq k$).

iii) Toute famille non vide E d'idéaux de A possède un élément maximal (i.e. un élément I de E tel que si J est dans E et $J \supset I$, alors $J = I$).

b) On suppose que A est intègre et noethérien. Montrer que tout élément $x \neq 0$ de A s'écrit

$$x = up_1...p_r,$$

avec u inversible dans A et les p_i irréductibles.

c) Soit K un corps. Montrer que l'anneau de polynômes $K[(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}]$ (réunion des anneaux $K[X_1]$, $K[X_1, X_2]$, ...) n'est pas noethérien mais qu'il est factoriel.

d) Montrer qu'un quotient d'un anneau noethérien est noethérien. Un sous-anneau d'un anneau noethérien est-il noethérien ?

3. (suite de l'exercice 2.). Soit A un anneau commutatif noethérien. Le but de cet exercice est de montrer que l'anneau $A[X]$ est noethérien. Pour tout idéal I de $A[X]$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on note $d_n(I)$ le sous-ensemble de A constitué de 0 et des coefficients dominants des polynômes de degré n de I.

a) Montrer que $d_n(I)$ est un idéal de A. Si I et J sont des idéaux de $A[X]$, montrer que $I \subset J$ implique $d_n(I) \subset d_n(J)$.

b) Montrer que si $n \in \mathbf{N}$, alors $d_n(I) \subset d_{n+1}(I)$.

c) Montrer que si $I \subset J$ et $d_n(I) = d_n(J)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $I = J$.

On considère maintenant une suite croissante $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ d'idéaux de $A[X]$. On note $d_l(I_m)$ un élément maximal de la famille des $d_k(I_n)$ ($k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}^*$), qui existe puisque A est noethérien.

d) Montrer que pour tout $k \leq l$, il existe un entier n_k tel que pour tout $n \geq n_k$, on ait $d_k(I_n) = d_k(I_{n_k})$.

Dans la suite, on pose $N = \max(m, n_0, n_1, ..., n_l)$.

e) Montrer que pour tout $n \geq N$ et tout $k \in \mathbf{N}$, on a $d_k(I_n) = d_k(I_N)$ (on distinguera les cas $k \leq l$ et $k > l$).

f) Conclure que $A[X]$ est noethérien. Que dire de $A[X_1, ..., X_r]$ si $r \in \mathbf{N}^*$?

g) Montrer que $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ est noethérien (utiliser l'exercice 2e).

4. Soit A un anneau factoriel de corps des fractions K. Soit p un élément irréductible de A. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in A[X]$ un polynôme non constant. On suppose :

i) p ne divise pas a_n.

ii) p divise a_k pour $0 \leq k \leq n-1$.

iii) p^2 ne divise pas a_0.

Le but de cet exercice est de montrer (*critère d'Eisenstein*) qu'alors P est irréductible dans $K[X]$ (et donc aussi dans $A[X]$ s'il est primitif).

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas où P est primitif.

b) Montrer que si P n'est pas irréductible dans $K[X]$, alors $P = QR$, avec Q, R dans $A[X]$ non constants. On pose alors $Q = b_r X^r + ... + b_0$ et $R = c_s X^s + ... + c_0$.

c) Montrer que l'anneau $B = A/(p)$ est intègre et que $A[X]/pA[X]$ est isomorphe à $B[X]$. On pose $K' = \operatorname{Frac} B$.

d) Montrer que les images $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ des polynômes Q, R dans $A[X]/pA[X]$ sont divisibles par X dans $K'[X]$.

e) Aboutir à une contradiction et en déduire le résultat.

5. Soit A un anneau euclidien, de stathme $v : A \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$. Pour tout x non nul dans A, on pose

$$w(x) := \min_{x|y} v(y).$$

a) Montrer que w est aussi un stathme euclidien pour A (si a, b sont dans A avec $b \neq 0$ ne divisant pas a et $w(b) = v(bs)$ avec $s \in A$, on effectuera la division euclidienne de as par bs pour le stathme v).

b) Montrer que pour tous x, y non nuls dans A, on a $w(xy) \geq w(x)$, et que si $u \in A^*$, on a $w(ux) = w(x)$.

c) Soit $m = \min_{x \in A \setminus \{0\}} w(x)$. Montrer que pour tout a non nul dans A, on a $w(a) = m$ ssi $a \in A^*$.

d) Soit $f \in A \setminus \{0\}$. Soit $B = A[1/f]$ (vu comme sous-anneau de $\operatorname{Frac} A$). En utilisant le stathme w, montrer que B est également euclidien (par exemple, l'anneau des nombres décimaux est euclidien).