Exercices : groupes (IV); groupe symétrique

D. Harari

Agrégation

1. On considère le groupe $G = \mathcal{A}_4$. Soit $D(G)$ son sous-groupe dérivé. Soit V_4 le sous-groupe de G constitué de l'identité et des doubles transpositions.

a) Montrer que $V_4 \lhd G$, puis que $D(G) \subset V_4$ (on observera que G/V_4 est de cardinal 3).

b) Montrer que $D(G) \neq \{1\}$ et que G ne possède pas de sous-groupe distingué de cardinal 2.

c) En déduire que $D(G) = V_4$.

d) Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe A, alors $H \lhd A$ (regarder les classes à gauche et à droite suivant G).

e) Soit H un sous-groupe de $G = \mathcal{A}_4$. Montrer que si H est d'indice 2, alors $D(G) \subset H$ (on considérera G/H) et aboutir à une contradiction en utilisant c). Ainsi G (qui est de cardinal 12) n'a pas de sous-groupe de cardinal 6.

2. On considère le groupe $G = \mathcal{A}_n$ pour $n \geq 3$.

a) Montré que G est engendré par les produits de deux transpositions.

b) Montrer que si a, b, c sont trois éléments distincts de $\{1, ..., n\}$, alors les produit de deux transpositions $(a, b)(b, c)$ et $(a, b)(a, c)$ sont des 3-cycles.

c) Montrer que si a, b, c, d sont quatre éléments distincts de $\{1, ..., n\}$, alors le produit $(a, b)(c, d)$ peut s'écrire comme produit de deux 3-cycles. En déduire que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

d) Soit $\tau = (a_1, a_2, a_3)$ et $\tau' = (b_1, b_2, b_3)$ deux 3-cycles. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau'$.

e) Avec les notations de d), on suppose $n \geq 5$. Montrer que si c, d sont deux éléments de $\{1, ..., n\}$ distincts et distincts de a_1, a_2, a_3, alors la permutation $u := \sigma(c, d)$ vérifie : $u\tau u^{-1} = \tau'$.

f) En déduire que si $n \geq 5$, alors τ et τ' sont toujours conjugués dans $\mathcal{A}_n$.

g) Montrer que deux doubles transpositions quelconques sont toujours conjuguées dans $\mathcal{A}_5$.

3. (Suite de l'exercice 2). On considère le groupe $G = \mathcal{A}_5$, qui est de cardinal 60.

a) Montrer que G contient : 15 éléments d'ordre 2 (les doubles transpositions), 20 éléments d'ordre 3 (les 3-cycles), et 24 éléments d'ordre 5 (les 5-cycles).

Soit maintenant H un sous-groupe distingué de G.

b) En utilisant l'exercice précédent, montrer que si H contient un élément d'ordre 2 (resp. d'ordre 3), il contient tous les éléments d'ordre 2 (resp. d'ordre 3).

c) Montrer que les sous-groupes d'ordre 5 de G sont conjugués (observer que $60 = 2^2 \times 3 \times 5$). En déduire que si H contient un élément d'ordre 5, alors il contient tous les éléments d'ordre 5.

d) On suppose que $H \neq \{1\}$. Montrer qu'il ne peut pas exister de $\omega \in \{2, 3, 5\}$ tel que tout élément non trivial de H soit d'ordre ω (raisonner sur le cardinal de H). En déduire que $\#H \geq 36$, puis que $H = G$. Ainsi $\mathcal{A}_5$ est simple.

4. (Suite des deux exercices précédents). On considère le groupe $G = \mathcal{A}_n$ pour $n \geq 5$. Soit H un sous-groupe distingué de G, non réduit à l'identité. Soit $\sigma \in H$ une permutation autre que l'identité. On pose $E = \{1, ..., n\}$.

a) On choisit $a \in E$ tel que $b =: \sigma(a)$ soit distinct de a, puis $c \in E$ distinct de $a, b, \sigma(b)$. Soit $\tau = (a, c, b)$. Montrer que le commutateur $\rho := [\tau, \sigma]$ est dans H.

b) Montrer que $\rho = (a, c, b)(b, \sigma(b), \sigma(c))$.

c) Montrer qu'il existe un sous-ensemble F de cardinal 5 de E vérifiant : F contient $\{a, b, c, \sigma(b), \sigma(c)\}$ et ρ opère trivialement sur $E - F$.

d) Montrer que le prolongement d'une permutation par l'identité en dehors de F induit un morphisme injectif $i : \mathcal{A}(F) \to \mathcal{A}_n$, et que $H_0 := i^{-1}(H)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}(F)$ non réduit au neutre.

e) Utiliser les deux exercices précédents pour montrer que H contient un 3-cycle, puis que $H = \mathcal{A}_n$. Ainsi $\mathcal{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$.