Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4M4U9, 2008/2009

Feuille de TD numéro 8.

1. a) Soit M une matrice normale de $M_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbf{C}[X]$ tel que $P(M) = M^*$.

b) Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{C})$, M et N deux matrices normales de $M_n(\mathbf{C})$. Montrer que si $AM = NA$, alors $AM^* = N^*A$.

2. a) Soit E un espace hermitien. Montrer que pour tout endomorphisme u de E, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

b) Montrer que le groupe unitaire $U_n(\mathbf{C})$ (muni de la topologie induite par la topologie d'e.v.n. de $M_n(\mathbf{C})$) est compact.

c) Soit F un fermé de $\mathbf{C}$. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{C})$ dont le spectre est inclus dans F est un fermé de $M_n(\mathbf{C})$.

3. Soient A une matrice hermitienne définie positive et B une matrice hermitienne. On note u et v les endomorphismes respectivement associés à A et B dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$. On note φ le produit scalaire hermitien sur $\mathbf{C}^n$ défini par $\varphi(x, y) = \langle u(x), y\rangle$, où $\langle ., .\rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$.

a) Montrer que l'endomorphisme $w := u^{-1} \circ v$ est hermitien pour le produit scalaire φ.

b) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n)$ de $\mathbf{C}^n$ telle que la matrice D de w dans $\mathcal{B}$ soit diagonale, et telle que $\varphi(f_i, f_j) = \delta_{ij}$ pour tous i, j de $[1, n]$.

c) Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$. Montrer qu'on a $P^*AP = I_n$ et $P^*BP = D$.

Ce résultat s'appelle "théorème de réduction simultanée". Bien noter qu'on ne diagonalise pas simultanément les endomorphismes associés à A et B (qui ne commutent pas en général), mais seulement les formes sesquilinéaires associées à A et B dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$.