Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

Feuille de TD numéro 7

1. Soit n un entier strictement positif. On munit $M_n(\mathbf{R})$ de sa topologie usuelle d'e.v.n. et ses sous-ensembles $O_n(\mathbf{R})$, $SO_n(\mathbf{R})$ de la topologie induite. On rappelle qu'un espace topologique X est dit *connexe par arcs* si pour tous points x, y de X, il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

a) Soit A un élément de $SO_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une application continue $f : [0, 1] \to SO_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $f(0) = I_n$ et $f(1) = A$.

b) En déduire que $SO_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

c) Qu'en est-il de $O_n(\mathbf{R})$?

d) Montrer que l'ensemble $S_n^+(\mathbf{R})$ des matrices réelles symétriques définies positives est connexe par arcs.

e) On note $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ constitué des matrices de déterminant strictement positif. En utilisant l'exercice 1 de la feuille 6, montrer que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

2. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n > 0$. Soient $x_1, ..., x_p$ des vecteurs de E. On appelle *matrice de Gram* de la famille $(x_1, ..., x_p)$ la matrice (g_{ij}) de $M_p(\mathbf{R})$ définie par $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$. On notera cette matrice $G(x_1, ..., x_p)$.

a) Montrer que $G(x_1, ..., x_p)$ est une matrice symétrique positive.

b) Soit A une matrice symétrique positive de $\mathbf{R}^p$. Montrer que pour tout vecteur colonne X de $\mathbf{R}^p$, la condition ${}^tXAX = 0$ implique $AX = 0$ (on introduira la forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto^t XAY$ sur $\mathbf{R}^p$ et on utilisera une inégalité de type Cauchy-Schwarz).

c) En déduire que le rang de la matrice $G(x_1, ..., x_p)$ est le rang de la famille $(x_1, ...x_p)$.

d) Soit A une matrice symétrique positive de $\mathbf{R}^p$. Montrer que si le rang de A est au plus n, alors il existe une matrice B de $M_{n,p}(\mathbf{R})$ telle que $A =^t BB$.

e) En déduire que si A est une matrice symétrique positive de $\mathbf{R}^p$, alors il existe des vecteurs $(x_1, ..., x_p)$ de E tels que $A = G(x_1, ...x_p)$ si et seulement si A est de rang $\leq n$.