Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4M4U9, 2008/2009

Feuille de TD numéro 6.

1. Soit A une matrice symétrique positive de $M_n(\mathbf{R})$.

a) Montrer qu'il existe une matrice symétrique positive S telle que $S^2 = A$.

b) Montrer que S est unique (on observera que S laisse stable les sous-espaces propres de A).

c) Soit M une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'on peut écrire $M = OS$ avec O matrice orthogonale et S matrice symétrique définie positive ("décomposition polaire"). Cette décomposition est-elle unique ?

2. On considère le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$, équipé de la topologie induite par celle de $M_n(\mathbf{R})$.

a) Montrer que $O_n(\mathbf{R})$ est compact.

b) En utilisant l'exercice 1.c), montrer que toute matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ s'écrit $M = OS$ avec O matrice orthogonale et S matrice symétrique positive.

3. a) Soit E un espace euclidien. Montrer que pour tout endomorphisme u de E dont le polynôme caractéristique est scindé, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

b) En utilisant l'exercice 2.a), montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé est un fermé de $M_n(\mathbf{R})$.

4. On note J la matrice de $M_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Calculer $\mathrm{Tr}\,(AJ)$ en fonction des a_{ij}.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $O \in O_n(\mathbf{R})$ telle que $J = ODO^{-1}$, où D est la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(n, 0, 0, ..., 0)$.

c) Soit $A \in O_n(\mathbf{R})$ une matrice orthogonale réelle. Montrer l'inégalité :

$$-n \leq \mathrm{Tr}\,(O^{-1}AOD) \leq n$$

d) En déduire que si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice orthogonale réelle, alors

$$-n \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} \leq n$$