Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4M4U9, 2008/2009

Feuille de TD numéro 5.

1. Soit K un corps.

a) Soient λ et μ deux éléments de K^*. Montrer que les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(K)$ si et seulement si λ/μ est un carré dans K^*.

b) Soit τ une transvection de $\mathrm{SL}_2(K)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K^*$ tel que τ soit conjuguée dans $\mathrm{SL}_2(K)$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in K^*$.

c) Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des transvections de $\mathrm{SL}_2(K)$. On note E l'ensemble quotient de $\mathcal{T}$ par la relation d'équivalence : $\tau_1 \sim \tau_2$ si et seulement si τ_1 et τ_2 sont conjugués dans $\mathrm{SL}_2(K)$. Montrer qu'il existe une bijection de E sur $K^*/{K^*}^2$, où ${K^*}^2$ désigne l'ensemble des carrés de K^*.

d) Quel est le cardinal de E quand $K = \mathbf{C}$, $K = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{Q}$? Et quand K est un corps fini ?

2. 1. On considère le groupe $S = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

a) Montrer que S est isomorphe au groupe $\mathcal{S}_3$ des permutations d'un ensemble à trois éléments. Que dire de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$?

b) Montrer que le sous-groupe dérivé de S est de cardinal 3.

2. On considère maintenant $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$.

a) Calculer le cardinal de G et le cardinal de $H := \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$.

b) On note $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ (resp. $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$) le quotient de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ (resp. de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$) par son centre. Calculer les cardinaux de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$.

c) Soit K un corps; on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des droites vectorielles du K-espace vectoriel K^2. Montrer qu'il existe un homomorphisme injectif de $\mathrm{PGL}_2(K)$ dans le groupe des permutations de $\mathcal{P}$.

d) En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.