Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4M4U9, 2008/2009

Feuille de TD numéro 4.

On désigne toujours par K un corps commutatif, par E un K-espace vectoriel de dimension finie n, et par $M_n(K)$ le K-espace vectoriel des matrices (n,n) à coefficients dans K. Le groupe multiplicatif des matrices (n,n) inversibles sera noté $\mathrm{GL}_n(K)$. On munit $M_n(\mathbf{C})$ de sa structure usuelle d'espace vectoriel normé sur $\mathbf{C}$. La matrice de Jordan de taille r sera notée J_r.

1. Soit M une matrice de $M_n(\mathbf{C})$. On note $\mathcal{S}(M)$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{C})$ qui sont semblables à M.

a) Montrer que si M est diagonalisable, alors $\mathcal{S}(M)$ est un fermé de $M_n(\mathbf{C})$.

b) Montrer que si $M = J_r$ $(r \geq 2)$ est une matrice de Jordan, alors $\mathcal{S}(M)$ n'est pas fermé.

c) La réciproque de a) est-elle vraie ?

2. On dit qu'un endomorphisme u de E est *semi-simple* si tout sous-espace de E qui est stable par u admet un supplémentaire stable par u.

a) Montrer que si u est diagonalisable, alors u est semi-simple (utiliser le théorème de la base incomplète).

b) Montrer la réciproque de a) si l'on suppose de plus que le polynôme caractéristique de de u est scindé (on procèdera par récurrence sur la dimension de E). Est-elle vraie en général ?

c) Montrer que si u est semi-simple, la restriction de u à tout sous-espace stable reste semi-simple.

3. a) Soit u un endomorphisme diagonalisable. Décrire ses invariants de similitude en fonction de ses valeurs propres et de leurs multiplicités.

b) Décrire les invariants de similitude d'un endomorphisme nilpotent en fonction de sa réduite de Jordan.

4. Soit M une matrice de $M_n(\mathbf{C})$.

a) On suppose que la suite (M^k) tend vers 0. Montrer que toute valeur propre de M est de module < 1.

b) On suppose maintenant que M s'écrit $\lambda I + N$ avec N nilpotente. Montrer que si $\mid \lambda \mid < 1$, alors la suite (M^k) tend vers zéro.

c) Montrer la réciproque de a).

d) Énoncer et démontrer un résultat analogue pour une matrice de $M_n(\mathbf{R})$