Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

Feuille de TD numéro 3.

On désigne toujours par K un corps commutatif, par E un K-espace vectoriel de dimension finie n, et par $M_n(K)$ le K-espace vectoriel des matrices (n,n) à coefficients dans K.

1. Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une matrice diagonale de $M_n(K)$. On note $C(D)$ le *commutant* de D, i.e. l'ensemble des matrices M de $M_n(K)$ telles que $MD = DM$. On note $S(D)$ l'ensemble des matrices M de $C(D)$ qui sont de plus semblables à D.

a) On suppose que les λ_i sont deux à deux distincts. Déterminer $C(D)$.

b) On suppose toujours les λ_i deux à deux distincts. Déterminer $S(D)$. Quel est son cardinal ?

c) On ne suppose plus les λ_i deux à deux distincts. On écrit

$$D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \mu_1, ..., \mu_2, \mu_2, ..., \mu_r, ..., \mu_r)$$

i.e. on note $\mu_1, ..., \mu_r$ les valeurs propres distinctes de D, chaque μ_i ayant une multiplicité m_i. Déterminer $C(D)$ et calculer sa dimension en fonction des m_i.

On suppose désormais que K est infini.

d) On suppose que $n = 3$. Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$, où λ_1, λ_2 sont des éléments distincts de K. Montrer que $S(D)$ est infini.

e) On revient à n quelconque. Montrer que si D est une matrice diagonale de $M_n(K)$, alors $S(D)$ est infini si et seulement si : D n'a pas toutes ses valeurs propres distinctes et n'est pas une homothétie.

f) Soit J la matrice de Jordan :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout $\alpha \in K^*$, la matrice J est semblable à αJ.

g) L'ensemble $S(J)$ est-il fini ?

2. On munit $M_n(\mathbf{C})$ de sa structure usuelle d'espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{C}$.

a) Montrer que l'ensemble Δ des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbf{C})$.

b) L'ensemble Δ est-il un ouvert de $M_n(\mathbf{C})$?

3. Soit A et B deux matrices de $M_n(K)$.

a) Montrer que si A est inversible, AB et BA sont semblables. Est-ce encore vrai en général ?

b) Montrer que si K est infini, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique (on considèrera les matrices de la forme $A + \lambda I_n$ avec $\lambda \in K$).

c) Le résultat de b) vaut-il encore si K est fini ?