Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4M4U9, 2008/2009

Feuille de TD numéro 1.

On désigne toujours par K un corps commutatif.

1. Soit L une extension d'un corps K.

a) Soient P et Q deux polynômes de $K[X]$ (qu'on peut aussi voir comme des polynômes de $L[X]$). Montrer que le p.g.c.d. de P et Q est le même dans $K[X]$ et dans $L[X]$.

b) Soit P un polynôme irréductible de $K[X]$. Montrer que si K est de caractéristique zéro, alors toutes les racines de P dans L sont simples.

c) Montrer que le résultat de b) reste vrai si K est parfait de caractéristique $p > 0$.

d) Montrer que le résultat de b) est faux si K n'est pas parfait.

2. Soit K un corps fini de cardinal q et de caractéristique $p > 0$.

a) Montrer que q est une puissance de p.

b) Montrer que l'ensemble des éléments de K^* qui s'écrivent x^2 avec $x \in K^*$ est de cardinal $(q-1)/2$ si p est impair et $q-1$ si $p = 2$.

c) On suppose $p \neq 2$. Montrer que si a et b sont dans K^*, alors l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ possède au moins une solution dans $K \times K$.

3. Soit H l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbf{C}$.

a) Montrer que $(H, +, .)$ est un anneau non commutatif, dans lequel tout élément non nul est inversible. Quelle est la dimension de H sur $\mathbf{R}$?

b) Montrer que l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède une infinité de solutions dans H.

4. Pour tout corps K, on note $\mu(K)$ l'ensemble des éléments x de K tels qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ avec $x^n = 1$.

a) Montrer que $\mu(K)$ est un sous groupe de K^* pour la multiplication.

b) Montrer que si $K = \mathbf{C}$, alors $\mu(K)$ est isomorphe à $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, +)$.