Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

Partiel du 27 mars 2009. Durée 2h. Aucun document autorisé

Par convention, tous les corps sont supposés commutatifs. Si K est un corps, on désigne par $M_n(K)$ le K-espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans K.

Exercice 1. (6 points)

Soit P le polynôme de $\mathbf{Q}[X]$ défini par $P = X^4 - 2$.

1. a) Montrer que P ne s'écrit pas sous la forme $P = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$ avec a, b, c, d dans $\mathbf{Q}$.

b) En déduit que P est un polynôme irréductible de $\mathbf{Q}[X]$.

2. Soit $K = \mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$. Déterminer le degré $[K : \mathbf{Q}]$.

3. On pose $L = K(i)$. Montrer que L est un corps de décomposition de P sur $\mathbf{Q}$. Quel est le degré $[L : \mathbf{Q}]$?

Exercice 2. (4 points)

Soit $x \in \mathbf{C}$. On dit qu'un élément y de $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{Q}$-*conjugué* de x s'il existe un polynôme irréductible unitaire P de $\mathbf{Q}[X]$ tel que $P(x) = P(y) = 0$.

1. On suppose x transcendant sur $\mathbf{Q}$. Combien x possède-t-il de $\mathbf{Q}$-conjugués ?

2. On suppose maintenant que x est algébrique et on pose $d = [\mathbf{Q}[x] : \mathbf{Q}]$. Montrer que le nombre de $\mathbf{Q}$-conjugués de x est d.

3. Est-ce que $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{3})$ est un $\mathbf{Q}$-conjugué de $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$?

Exercice 3. (5 points)

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E, de spectre $\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$. Pour chaque valeur propre λ_i, on note $F_i = \ker(u - \lambda_i \,\mathrm{id})^{m_i}$ l'espace caractéristique associé (où m_i est la multiplicité de λ_i comme racine du polynôme caractéristique de u).

1. a) Soit F un sous-espace de E qui est stable par u. Montrer que F est également stable par la projection p_i sur F_i parallèllement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$.

b) En déduire que $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} (F \cap F_i)$.

2. On suppose maintenant que u est diagonalisable. Soient $E_1, ..., E_r$ les sous-espaces propres de u. Montrer qu'un sous-espace F de E est stable par u si et seulement s'il existe des sous-espaces respectifs $G_1, ..., G_r$ de $E_1, ..., E_r$ tels que $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} G_i$.

Exercice 4. (5 points)

1. Soit $K = \mathbf{F}_q$ un corps fini de cardinal q. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in M_n(K)$.

a) Montrer que si M est diagonalisable, alors $M^q = M$.

b) Montrer réciproquement que si $M^q = M$, alors M est une matrice diagonalisable.

2. Donner un exemple d'entier $n \in \mathbf{N}^*$ et de matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^7 = A$, mais la matrice réelle A ne soit pas diagonalisable.