Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2007/2008

Partiel du 26 mars 2008. Durée : 2 heures.

Tous les corps sont supposés commutatifs. On note comme d'habitude $\mathbf{Q}$ *le corps des rationnels,* $\mathbf{R}$ *le corps des réels et* $\mathbf{C}$ *le corps des complexes. Si* K *est un corps, on note* $K(T)$ *le corps des fractions rationnelles à coefficients dans* K*.*

Exercice 1 (8 points).

Quand K et L sont deux corps, on dira que L *domine* K s'il existe un morphisme de corps $\varphi : K \to L$ de K dans L. On notera $K \leq L$ pour "L domine K".

1. Soient K et L deux sous-corps de $\mathbf{C}$ de degré fini sur $\mathbf{Q}$.

a) On suppose que $[K : \mathbf{Q}] = [L : \mathbf{Q}]$ et que $K \leq L$. Montrer que les corps K et L sont isomorphes.

b) On suppose maintenant que $K \leq L$ et $L \leq K$. Montrer que K et L sont isomorphes.

c) Donner un exemple où $[K : \mathbf{Q}] = [L : \mathbf{Q}]$, mais où on n'a ni $K \leq L$ ni $L \leq K$ (en justifiant la réponse).

2. Soient K et L deux corps finis. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur leurs cardinaux pour qu'on ait $K \leq L$.

3. On prend $K = \mathbf{C}$ et $L = \mathbf{C}(T)$. Montrer que $K \leq L$ mais que les corps K et L ne sont pas isomorphes.

Exercice 2 (6 points).

1. Soit $M \in M_n(\mathbf{Q})$ une matrice dont le polynôme minimal π_M s'écrit

$$\pi_M = P_1^{\alpha_1} ... P_r^{\alpha_r}$$

avec $\alpha_i \geq 1$ et les P_i polynômes irréductibles de $\mathbf{Q}[X]$, deux à deux premiers entre eux.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les entiers α_i pour que la matrice M soit diagonalisable en tant que matrice complexe.

2. Soit p un nombre premier, on pose $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(T)$. Trouver une matrice A de $M_p(K)$ dont le polynôme minimal est $\pi_A(X) = X^p - T$.

3. Soit L un corps algébriquement clos contenant $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(T)$. La matrice A de la question 2. est-elle diagonalisable en tant que matrice de $M_p(L)$?

Exercice 3 (6 points).

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on dira d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ dont le déterminant et la trace sont nuls. Alors M est nilpotente.

b) Soit $M \in M_n(\mathbf{C})$. Si une matrice N laisse stable les sous-espaces propres de M, alors N commute avec M.

c) Soient K un sous-corps de $\mathbf{C}$ et $M \in M_n(K)$. Soit L un corps de décomposition du polynôme caractéristique de M. Si M est diagonalisable en tant que matrice complexe, alors elle est diagonalisable en tant que matrice de $M_n(L)$.

d) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice nilpotente. Alors pour tout réel $\alpha \neq 0$, les matrices M et αM sont semblables.