Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2006/2007

Partiel du 30 mars 2007. Durée : 2 heures.

Exercice 1 (5 points).

1. Soient a, b, c trois réels. On considère la matrice réelle

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

a) Montrer que le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbf{R}$.

b) Montrer que M est diagonalisable.

2. Soient α, β, γ trois nombres complexes. La matrice complexe

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

est-elle toujours diagonalisable ?

Exercice 2 (10 points).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur un corps commutatif K. Soit u un endomorphisme de E. On note $\mathrm{Com}(u)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes v qui commutent avec u.

1. On suppose dans toute cette question 1. que u est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe x dans E tel que $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

a) Quel est le degré du polynôme minimal de u ?

b) Soit v un élément de $\mathrm{Com}(u)$. Montrer que si $v(x) = 0$, alors $v = 0$.

c) En déduire que $\mathrm{Com}(u)$ est de dimension au plus n.

d) Montrer que $\mathrm{Com}(u)$ est l'ensemble des $P(u)$ avec P polynôme de $K[X]$.

2. On suppose maintenant que u n'est pas cyclique.

a) Soient $P_1, ..., P_r$ les invariants de similitude de u. Montrer que $r \geq 2$.

b) Montrer qu'il existe un élément de $\mathrm{Com}(u)$ qui n'est pas de la forme $P(u)$ avec $P \in K[X]$.

Exercice 3 (5 points).

a) Soient K un sous-corps de $\mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Soit $f : K \to K$ un morphisme de corps. Montrer que si un élément a de K vérifie $P(a) = 0$, alors $P(f(a)) = 0$.

b) On prend $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$. Déterminer les morphismes de corps de K dans K.

c) Même question avec $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$.