Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

Examen du 12 juin 2009. Durée 2h. Aucun document autorisé.

Par convention, tous les corps sont supposés commutatifs. Si K est un corps, on désigne par $M_n(K)$ le K-espace vectoriel des matrices (n,n) à coefficients dans K. On note $\mathbf{R}$ le corps des réels et $\mathbf{C}$ le corps des complexes.

Exercice 1. (4 points)

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Soit P un polynôme irréductible de $\mathbf{R}[X]$ et soit K un corps de rupture de P sur $\mathbf{R}$. Alors K est isomorphe à $\mathbf{R}$ ou à $\mathbf{C}$.

b) Soit $\mathbf{F}_4$ un corps fini à 4 éléments et $\mathbf{F}_8$ un corps fini à 8 éléments. Alors il existe un morphisme de corps de $\mathbf{F}_4$ dans $\mathbf{F}_8$.

c) Soit $P = X^3 - 7$. Si K est un corps de décomposition de P sur $\mathbf{Q}$, alors K n'est pas un corps de rupture de P sur $\mathbf{Q}$.

d) Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Alors tout morphisme de corps de K dans K est bijectif.

Exercice 2. (4 points)

On désigne par n un entier strictement positif. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

a) Soit $M \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonalisable. Montrer que pour tout polynôme non constant P de $\mathbf{C}[X]$, il existe une matrice A de $M_n(\mathbf{C})$ telle que $P(A) = M$.

b) Soit N une matrice nilpotente non nulle de $M_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice A de $M_n(\mathbf{C})$ telle $A^n = N$.

c) Soit N une matrice nilpotente de $M_n(\mathbf{C})$. On suppose que N est de rang $n-1$. Montrer que N est semblable à la matrice de Jordan J_n.

Exercice 3. (6 points)

Soit n un entier strictement positif. On note $\mathcal{T}$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbf{C})$ constitué de l'identité I et des matrices M telles que l'endomorphisme correspondant à M (dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$) soit une transvection. Le

$\mathbf{C}$-espace vectoriel $M_n(\mathbf{C})$ est muni de sa topologie usuelle d'e.v.n. de dimension finie.

a) Soit $M \in \mathcal{T}$. Montrer qu'il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathcal{T}$ telle que $\gamma(0) = I$ et $\gamma(1) = M$.

b) En déduire que $\mathcal{T}$ est connexe par arcs.

c) Montrer que $SL_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 4. (6 points +2 points de bonus pour les questions subsidiaires)

On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle , \rangle$. On note $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne d'un vecteur x de $\mathbf{R}^n$.

Soit M une matrice inversible de $M_n(\mathbf{R})$. On note $x_1, ..., x_n$ les vecteurs-colonne de M.

a) Montrer qu'il existe une base $(f_1, ..., f_n)$ de $\mathbf{R}^n$ vérifiant les deux conditions suivantes :

-La matrice de passage de la base $(x_1, ...x_n)$ à la base $(f_1, ..., f_n)$ est triangulaire supérieure et tous ses termes diagonaux sont égaux à 1.

-Si i et j sont deux entiers de $\{1, ..., n\}$ avec $i \neq j$, alors $\langle f_i, f_j \rangle = 0$.

b) Montrer que pour tout i de $1, ..., n$, on a

$$||f_i|| \leq ||x_i||$$

c) En déduire l'inégalité

$$|\det M| \leq \prod_{i=1}^{n} ||x_i||$$

d) (Questions subsidiaires) : donner une interprétation géométrique de l'inégalité du c). Quand y a-t-il égalité ?