Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2007/2008

Examen du 11 juin 2008. Durée : 2 heures.

Tous les corps sont supposés commutatifs.

Exercice 1 (4 points).

Soient K et L deux corps. On suppose que L est une extension finie de degré n de K et on appelle E l'ensemble des morphismes de corps f de L dans L qui vérifient de plus la condition : $f(x) = x$ pour tout x de K.

1. a) Soit $f \in E$. L'application f est-elle toujours un morphisme de K-espaces vectoriels de L dans L ?

b) Montrer que si $f \in E$, alors f est bijective.

2. On suppose maintenant que L est le corps de rupture d'un polynôme irréductible $P \in K[X]$ et on écrit $L = K[\alpha]$ avec $\alpha \in L$.

a) Soient f et g des éléments de E. Montrer que si $f(\alpha) = g(\alpha)$, alors $f = g$.

b) Montrer que E est un ensemble fini de cardinal au plus n.

Exercice 2 (4 points).

a) Soit K le corps $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Donner un exemple de matrice M de $M_2(K)$ qui vérifie $M^2 = I$ mais n'est pas diagonalisable.

b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice réelle qui vérifie $M^3 = I_n$. On suppose que le polynôme caractéristique de M est scindé. Montrer que $M = I_n$.

Exercice 3 (6 points).

1. Soit K un corps. On considère dans $M_2(K)$ la matrice

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver deux matrices A et B inversibles et de trace nulle telles que $AB = J_2$.

2. Soit $r \geq 2$. Montrer que la matrice identité I_r s'écrit comme produit de deux matrices inversibles et de trace nulle.

3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 4$. On note comme d'habitude $GL(E)$ l'ensemble des applications linéaires bijectives de E dans E, et $\mathrm{SL}(E)$ l'ensemble des éléments de $GL(E)$ de déterminant 1.

a) Montrer que toute transvection u de E peut s'écrire $u = v \circ w$, où v et w sont deux éléments de $\mathrm{GL}(E)$ de trace nulle.

b) Montrer que tout élément f de $\mathrm{SL}(E)$ peut s'écrire $f = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_s$, où s est un entier et les f_i sont des éléments de $\mathrm{GL}(E)$ de trace nulle.

Exercice 4 (6 points).

Soit n un entier strictement positif. On munit $M_n(\mathbf{C})$ (resp. $M_n(\mathbf{R})$) de sa topologie usuelle d'e.v.n. et le groupe unitaire $U_n(\mathbf{C})$ (resp. le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$) de la topologie induite.

On rappelle qu'un espace topologique X est dit *connexe par arcs* si pour tous points x, y de X, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

1. Soit A un élément de $U_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe une application continue $f : [0,1] \to U_n(\mathbf{C})$ vérifiant : $f(0) = I_n$ et $f(1) = A$.

2. En déduire que $U_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

3. Le résultat de **2.** vaut-il si on remplace $U_n(\mathbf{C})$ par $O_n(\mathbf{R})$?