Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2006/2007

Examen du 11 juin 2007. Durée : 2 heures.

Exercice 1 (5 points).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K.

a) Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors $u + v$ et $u \circ v$ sont diagonalisables.

b) On suppose K algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$. Montrer que tout élément de G est diagonalisable.

c) Le résultat de b) subsiste-t-il si $K = \mathbf{R}$?

Exercice 2 (6 points).

On appelle K l'ensemble des nombres complexes x vérifiant la propriété suivante : il existe une suite finie

$$K_0 = \mathbf{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_n$$

de sous-corps de $\mathbf{C}$ tels qu'on ait $[K_i : K_{i-1}] \leq 2$ pour tout $i \in 1, 2, ..., n$, avec $x \in K_n$.

a) Montrer que si $x \in K$, alors x est algébrique sur $\mathbf{Q}$.

b) Montrer que si $x \in K$, l'entier $[\mathbf{Q}[x] : \mathbf{Q}]$ est une puissance de 2.

c) Donner un exemple (en justifiant) de nombre complexe z algébrique sur $\mathbf{Q}$, mais tel que $z \notin K$.

Exercice 3 (3 points).

Soit K un corps infini et n un entier au moins égal à 2.

a) Soit $f : (\mathrm{SL}_n(K), \times) \to (K^*, \times)$ un morphisme de groupes. Montrer que le groupe quotient $\mathrm{SL}_n(K)/\ker f$ est abélien.

b) En déduire que f est constant égal à 1.

Exercice 4 (6 points).

On note J la matrice de $M_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Calculer $\mathrm{Tr}\,(AJ)$ en fonction des a_{ij}.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $O \in O_n(\mathbf{R})$ telle que $J = ODO^{-1}$, où D est la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(n, 0, 0, ..., 0)$.

c) Soit $A \in O_n(\mathbf{R})$ une matrice orthogonale réelle. Montrer l'inégalité :

$$-n \leq \mathrm{Tr}\,(O^{-1}AOD) \leq n$$

d) En déduire que si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice orthogonale réelle, alors

$$-n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \leq n$$