Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

Devoir à la maison numéro 2.

Soit E un espace de dimension finie $n \geq 3$ sur un corps K. Soit N un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}(E)$, on suppose que N contient le centre Z de $\mathrm{SL}(E)$ avec $N \neq Z$. Le but du problème est de démontrer que $N = \mathrm{SL}(E)$. On choisit $\sigma \in N$ avec $\sigma \notin Z$. Pour simplifier on notera multiplicativement la loi de composition dans $\mathrm{SL}(E)$.

1. a) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que le vecteur $b = \sigma(a)$ ne soit pas colinéaire à a.

b) Soit τ une transvection de droite Ka et soit $\rho = [\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Montrer que ρ est un élément de N avec $\rho \neq \mathrm{id}$.

2. a) Montrer que pour tout x de E, on a $\rho(x) - \tau^{-1}(x) \in Kb$ et $\tau^{-1}(x) - x \in Ka$.

b) En déduire qu'il existe un hyperplan H de E tel que $\mathrm{Im}\,(\rho - \mathrm{id}) \subset H$.

c) Montrer que si u et v sont des transvections d'hyperplan H, alors uv est une transvection ou l'identité.

3. On suppose dans cette question 3. qu'il existe une transvection u d'hyperplan H telle que $u\rho \neq \rho u$. Montrer que $v := [u, \rho]$ est une transvection avec $v \in N$.

4. On suppose au contraire dans cette question 4. que toute transvection d'hyperplan H commute avec ρ. Soit $c \in H$ et x un vecteur de E qui n'est pas dans H. On fixe une forme linéaire f de noyau H.

a) Montrer qu'on peut écrire $x = \rho(x) + y$ avec $y \in H$.

b) Montrer que $f(x)\rho(c) = f(x)c$ (on pourra utiliser la transvection $u := \tau(c, f)$).

c) En déduire que ρ est une transvection avec $\rho \in N$.

5. En utilisant 3. et 4.c), montrer que $N = \mathrm{SL}(E)$.

6. On note $\mathrm{PSL}(E) = \mathrm{SL}(E)/Z$. Soit $\overline{N}$ un sous-groupe distingué de $\mathrm{PSL}(E)$.

a) Montrer que l'image réciproque N de $\overline{N}$ par la surjection canonique $\pi : \mathrm{SL}(E) \to \mathrm{PSL}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}(E)$.

b) En déduire que $\overline{N}$ est le groupe trivial ou $\overline{N} = \mathrm{PSL}(E)$ ("simplicité de $\mathrm{PSL}(E)$").