Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4MA1U9, 2008/2009

Devoir à la maison.

Exercice 1. : Corps de décomposition.

Soient K un corps et $P \in K[X]$. Soit L un corps de décomposition de P sur K. On considère un polynôme irréductible $Q \in K[X]$.

1. Soit M un corps de décomposition de PQ sur K. Montrer qu'il existe un morphisme de corps $L \to M$.

Dans toute la suite de l'exercice, on identifiera L à un sous-corps de M et K à un sous-corps de L.

2. Soit α une racine de Q dans M. Montrer que le sous-corps $L(\alpha)$ de M est un corps de décomposition de P sur $K(\alpha)$.

3. Soit β une autre racine de Q dans M. Montrer que les degrés $[L(\alpha) : K]$ et $[L(\beta) : K]$ sont égaux; en déduire que $[L(\alpha) : L]$ et $[L(\beta) : L]$ sont aussi égaux.

4. Montrer que si le polynôme Q possède une racine dans L, alors il est scindé sur L (on dit que l'extension L de K est *normale.*).

Exercice 2. : Vrai ou faux ?

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont justes et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse). On désigne toujours par K un corps commutatif et par E un K-espace vectoriel de dimension finie. On note $M_n(K)$ l'ensemble des matrices à coefficients dans K.

a) Si deux matrices A et B de $M_n(K)$ ont même polynôme caractéristique, alors elles sont semblables.

b) Soient u et v deux endomorphismes de E. Soit w un endomorphisme bijectif de E, on suppose que $w \circ u \circ w^{-1} = v$. Alors u est diagonalisable si et seulement si v est diagonalisable.

c) Soient λ et μ deux éléments de K avec $\lambda \neq \mu$. On pose $M = \mathrm{Diag}(\lambda, \mu)$. Alors si K est infini, il existe une infinité de matrices semblables à M.

d) Soit u un endomorphisme diagonalisable de E. Si v est un endomorphisme de E qui laisse stable tous les sous-espaces propres de u, alors $u \circ v = v \circ u$.

e) Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = \mathrm{id}_E$. Alors u est diagonalisable.

Exercice 3. : Trigonalisation, cotrigonalisation.

Soient K un corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soit u un endomorphisme trigonalisable de E. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E qui est stable par u, alors la restriction de u à F est un endomorphisme trigonalisable de F.

2. Soient u et v deux endomorphismes trigonalisables de E. On suppose que $u \circ v = v \circ u$.

a) Montrer qu'il existe un vecteur x non nul de E qui est un vecteur propre à la fois pour u et pour v.

b) Soit F un sous-espace de E qui est stable pour u et v. Soit G un supplémentaire de F dans E, on note p la projection sur G parallèlement à F. On pose $u_1 = p \circ u$ et $v_1 = p \circ v$. Montrer que u_1 et v_1 laissent G stable et que $u_1 \circ v_1 = v_1 \circ u_1$ (on pourra utiliser le produit par blocs des matrices).

c) Soient u_2 et v_2 les restrictions respectives de u_1 et v_1 à G. Montrer que u_2 et v_2 sont des endomorphismes trigonalisables de G.

d) En utilisant a), b), et c), montrer par récurrence sur n qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux triangulaires supérieures (on dit que u et v sont *cotrigonalisables*).

3. Soient u et v deux endomorphismes cotrigonalisables de E. A-t-on forcément $u \circ v = v \circ u$?

4. Soient u et v les deux endomorphismes de K^2 définis par $u(x, y) = (y, 0)$ et $v(x, y) = (0, x)$ pour tout $(x, y) \in K^2$. Montrer que u, v sont tous deux trigonalisables, mais qu'ils ne sont pas cotrigonalisables.