Université Paris-Sud
Mathématiques générales (algèbre).
D4M4U9, 2008/2009

Corrigé de la feuille de TD numéro 8.

1. a) On écrit $M = QDQ^{-1}$ avec Q orthogonale et D diagonale. Alors $M^* = Q\overline{D}Q^{-1}$. Si $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont les valeurs propres de D (sans répétition), on peut trouver un polynôme P tel que $P(\lambda_i = \bar{\lambda}_i)$ (prendre un polynôme interpolateur de Lagrange). Alors $P(D) = \overline{D}$ d'où $P(M) = M^*$.

b) On peut de même trouver un polynôme P tel que $P(M) = M^*$ et $P(N) = N^*$ (en envoyant par P toute valeur propre de M ou N sur sa conjuguée). L'égalité $AM = NA$ donne (par récurrence) $AM^k = N^kA$ pour tout entier k, et par linéarité $AP(M) = P(N)A$ d'où le résultat.

2. a) Il suffit de trigonaliser u dans une base quelconque, puis d'appliquer Gram-Schmidt à cette base.

b) $U_n(\mathbf{C})$ est fermé dans $M_n(\mathbf{C})$ comme image réciproque de $\{I\}$ par l'application continue $M \mapsto M^*M$. D'autre part $U_n(\mathbf{C})$ est borné car si $M \in U_n(\mathbf{C})$, tous les coefficients de M sont de module au plus 1 (la somme des modules au carré des éléments d'une colonne faisant 1). Finalement $U_n(\mathbf{C})$ est compact.

c) Soit (M_k) une suite de matrices qui converge vers M, et telle que le spectre de M_k soit inclus dans F pour tout k. On écrit (via a)) $M_k = U_kT_kU_k^{-1}$ avec T_k triangulaire supérieure et U_k unitaire. D'après b), on peut supposer (quitte à extraire) que la suite (U_k) converge vers $U \in U_n(\mathbf{C})$. Alors (T_k) converge vers $U^{-1}MU$. La limite T de T_k est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux restent dans F vu que c'est le cas pour T_k (qui est semblable à M_k, donc a les mêmes valeurs propres) et que F est fermé. Finalement, comme M est semblable à T, le spectre de M reste inclus dans F.

3. a) Si $X, Y \in \mathbf{C}^n$, on a

$$\varphi((u^{-1} \circ v)(X), Y) = \langle BX, Y \rangle = \langle X, BY \rangle$$

Et

$$\varphi(X, (u^{-1} \circ v)(Y)) = \langle AX, A^{-1}BY \rangle = \langle X, BY \rangle$$

tout ceci utilisant que A et B représentent des endomorphismes hermitiens pour $\langle , \rangle$ dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$. Ainsi w est hermitien pour φ.

b) C'est simplement le fait que w est diagonalisable dans une base qui est orthonormée pour φ, en tant qu'endomorphisme hermitien pour ce produit scalaire.

c) Matriciellement le fait que $\mathcal{B}$ soit orthonormée pour φ se traduit par $P^*AP = I_n$ d'après la formule de changement de changement de base des formes hermitiennes. La formule de changement de base pour l'endomorphisme w donne $P^{-1}A^{-1}BP = D$. Comme $P^* = P^{-1}A^{-1}$, le résultat est prouvé.